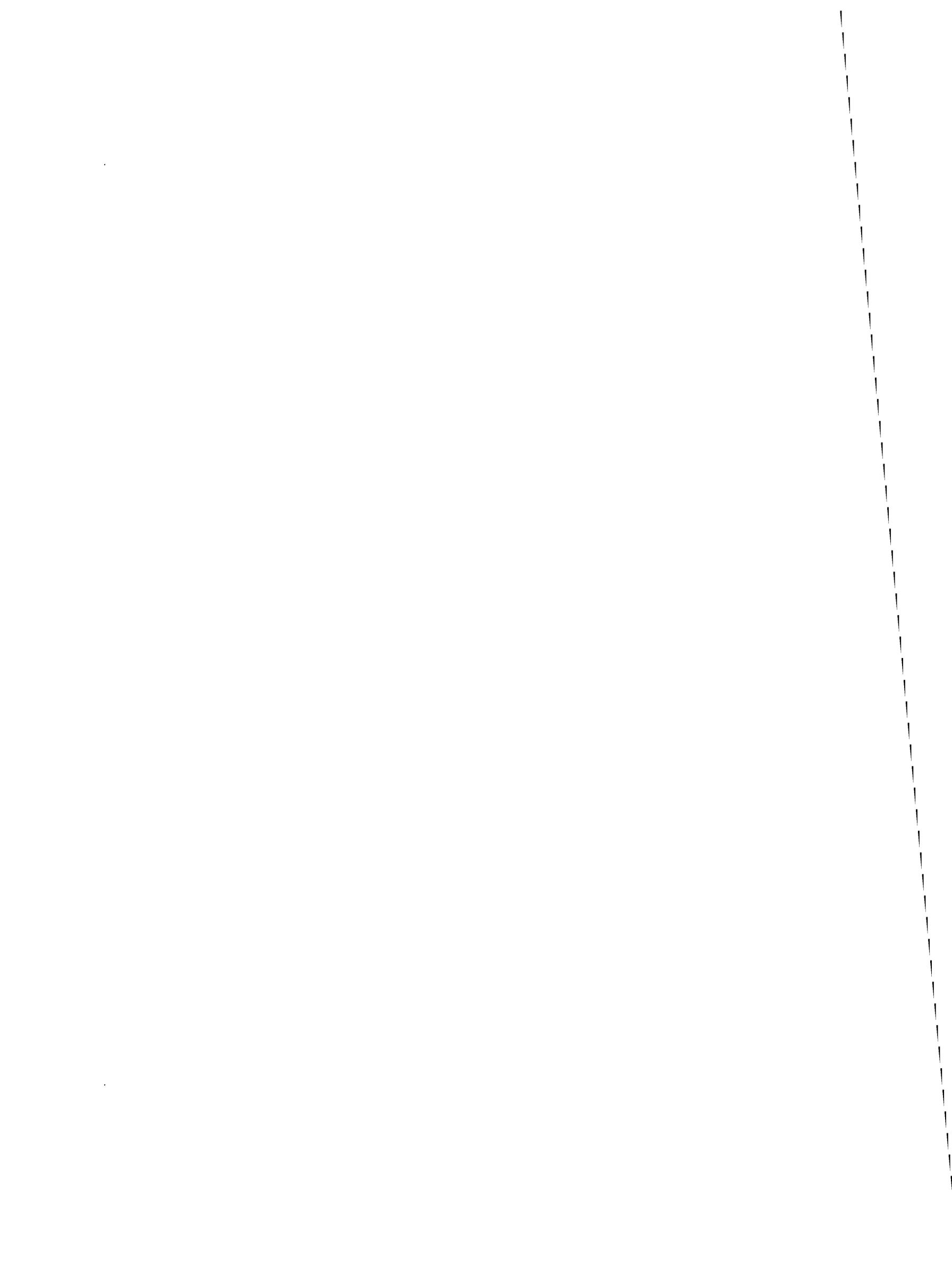


Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano

Emmanuel Peyre

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7 rue René-Descartes
67084 Strasbourg
France

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
53225 Bonn
Germany



Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano

Emmanuel Peyre

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7 rue René-Descartes
67084 Strasbourg
France

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
53225 Bonn
Germany

Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano

Emmanuel Peyre *

11 Octobre 1993

Résumé

Soit V une variété de Fano. On peut construire sur V une hauteur correspondant à l'opposé du faisceau canonique. Pour tout ouvert U de V , on note $n_U(H)$ le cardinal des points rationnels de U de hauteur inférieure à H . Manin a conjecturé que, pour un ouvert U convenable, il existe une constante C telle que

$$n_U(H) \sim CH \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

avec $t = \text{rg Pic}(V)$. Ce texte donne tout d'abord une expression conjecturale de la constante C en termes du volume de l'espace adélique associé à V pour une mesure de Tamagawa dépendant du choix de la hauteur. Cette expression est compatible avec les résultats de la méthode du cercle et redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. La conjecture ainsi raffinée est ensuite vérifiée pour des variétés de Fano obtenues en éclatant des sous-espaces de codimension deux dans $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$.

Abstract

Let V be a Fano variety and let h be a height on V corresponding to the inverse of the canonical sheaf. For any open set U of V , let $n_U(H)$ denote the number of rational points in U whose height is bounded by H . Manin conjectured that for a small enough U , there exists a constant C such that

$$n_U(H) \sim CH \log^{t-1} H$$

where $t = \text{rk Pic } V$. The first aim of this paper is to give a conjectural expression for the constant C in terms of the adelic volume of V for a Tamagawa measure corresponding to the chosen height. This expression agrees with the

*Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France

Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren-Straße 26, D-53225 Bonn, Deutschland.

constants computed by Schanuel for projective spaces and by Franke, Manin and Tschinkel for generalized flag varieties under quasi-split groups and is compatible with the results of the circle method. We then check the conjecture thus refined for Fano varieties obtained as the blowing-up of particular subspaces of codimension two in $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$.

Soit V une variété de Fano telle que l'opposé du faisceau canonique ω_V^{-1} soit très ample. A toute base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ correspond une hauteur h sur V . Pour tout ouvert U de V , on note

$$n_U(H) = \#\{P \in U(k) / h(P) \leq H\}.$$

Manin a conjecturé qu'à condition de se restreindre à un ouvert suffisamment petit U , le comportement asymptotique de ce cardinal est de la forme

$$n_U(H) \sim CH \log^{t-1} H$$

où t désigne le rang du groupe de Picard de V . Il faut noter que la constante qui apparaît dans cette estimation dépend des choix faits lors de la construction de la hauteur. Toutefois il est possible de donner une expression conjecturale de cette constante. Pour cela, on utilise tout d'abord la correspondance naturelle entre hauteurs et systèmes de métriques sur les fibrés canoniques des variétés $V \times_k k_\nu$, où les corps k_ν sont les complétés de k pour les différentes places ν de k . Un tel système de métriques permet alors de construire une mesure de Tamagawa sur V qui généralise la mesure de Tamagawa usuelle pour les groupes algébriques notamment décrite dans [We], ainsi que la mesure de Leray utilisée dans la méthode du cercle (cf. [Lac]). La constante conjecturale s'exprime alors en termes du nombre de Tamagawa correspondant. La conjecture ainsi raffinée est stable par produit de variétés, redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. Elle est également compatible avec les résultats de la méthode du cercle.

Dans le cas des variétés de drapeaux ou celui des intersections complètes, le résultat est indépendant de l'ouvert choisi. En particulier, on peut prendre $U = V$. Cela n'est plus possible lorsque la variété contient des sous-variétés accumulatrices. Les exemples les plus simples de telles variétés sont obtenues par éclatement. Il nous a donc semblé intéressant de vérifier la conjecture de Manin raffinée pour les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ ainsi que pour la variété obtenue en éclatant les sous-espaces de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$ définis par les équations $X_i = X_j = 0$ pour $i \neq j$.

L'énoncé de la conjecture de Manin est rappelé dans la partie 1. L'objet de la partie 2 est la construction de la constante conjecturale. Dans les parties 3, 4 et 6, nous vérifions la compatibilité de la conjecture raffinée avec les résultats antérieurs. La partie 5 donne une condition nécessaire et suffisante pour que la conjecture soit indépendante de la construction de la hauteur. Dans les parties 8 à 10 nous montrons la conjecture pour des variétés obtenues par éclatement.

Je tiens à remercier J.-L. Colliot-Thélène, Y. Manin, C. Soulé et Y. Tschinkel pour les discussions et les indications qui ont permis la réalisation de ce texte.

Plan

1	Une conjecture de Manin	4
1.1	Notations	4
1.2	Hauteurs associées à un faisceau ample	5
1.3	Sous-variétés accumulatrices	6
1.4	Enoncé de la conjecture de Manin	7
1.5	Rappel des résultats connus	7
2	Hauteurs et mesures de Tamagawa sur une variété de Fano	8
2.1	Expression conjecturale de la constante	8
2.2	La conjecture de Manin raffinée	13
2.3	Présentation des résultats	14
3	Compatibilité de la conjecture avec le produit de variétés	14
4	Le cas des intersections complètes non singulières	16
4.1	Domaine fondamental pour l'action des unités	16
4.2	Compatibilité de la conjecture avec la méthode du cercle	18
5	Indépendance vis-à-vis de la construction de la hauteur	25
6	Compatibilité de la conjecture avec les résultats de Schanuel, Franke, Manin et Tschinkel	29
6.1	Le cas de l'espace projectif	29
6.2	Le cas des variétés de drapeaux généralisées	30
6.2.1	Notations	30
6.2.2	Le résultat de Franke, Manin et Tschinkel	32
6.2.3	Expression de la constante en termes de la mesure de Tamagawa	33
6.2.4	Vérification de la conjecture raffinée	44
7	Généralités sur les éclatements	45
7.1	Domaine fondamental pour l'action des unités	45
7.2	Volume du domaine fondamental	47
8	Cas de l'éclatement de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ en trois points rationnels et de ses analogues en dimension supérieure	47
8.1	Construction de la hauteur et sous-variétés accumulatrices	47
8.2	Réécriture de la hauteur	49
8.3	Estimations pour le corps des rationnels	52
8.4	Sommation sur les idéaux	56
8.5	Formule d'inversion	63

8.6	Enoncé du résultat	67
9	Cas de l'éclatement en un point rationnel	68
9.1	Construction de la hauteur	68
9.2	Réécriture de la hauteur	69
9.3	Estimations pour le corps des rationnels	70
9.4	Sommation sur les idéaux	70
9.5	Formule d'inversion	71
9.6	Enoncé du résultat	72
10	Cas de l'éclatement en deux points rationnels	72
10.1	Construction de la hauteur	72
10.2	Réécriture de la hauteur	73
10.3	Estimations sur le corps des rationnels	74
10.4	Sommation sur les idéaux	74
10.5	Formule d'inversion	75
10.6	Enoncé du résultat	75
11	Cas de l'éclatement en deux points conjugués	76
11.1	Construction de la hauteur	76
11.2	Réécriture de la hauteur	77
11.3	Estimations dans un cas particulier	80
11.4	Sommation sur les idéaux	81
11.5	Formule d'inversion	83
11.6	Enoncé du résultat	85

1 Une conjecture de Manin

1.1 Notations

Nous commençons par introduire des notations qui sont utilisées dans l'ensemble de ce texte.

Notations. Pour tout corps F , on note \overline{F} une clôture algébrique de F .

Pour tout corps de nombres k , \mathcal{O}_k désigne son anneau des entiers et U_k le groupe des unités de k . On notera M_k l'ensemble des places de k , $M_{f,k} \subset M_k$ l'ensemble des idéaux premiers de \mathcal{O}_k et $M_{\infty,k}$ l'ensemble des places à l'infini de k . Pour tout $\mathfrak{p} \in M_k$, on note $k_{\mathfrak{p}}$ le corps local correspondant et $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ la norme associée à \mathfrak{p} définie par (cf. [Se2], page 9):

$$\forall x \in k_{\mathfrak{p}}, |x|_{\mathfrak{p}} = |N_{k_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$$

où $p \in M_{\mathbb{Q}}$ est l'unique place telle que $\mathfrak{p} | p$ et $|\cdot|_p$ la norme usuelle. En particulier cette norme n'est pas invariante par extension de corps. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$, on

désigne par \mathbf{F}_p le corps résiduel. Pour tout $\nu \in M_{\infty,k}$, on note $N_\nu = [k_\nu : \mathbf{R}]$,

$$\begin{aligned} r_{1,k} &= \#\{\nu \in M_{\infty,k}/N_\nu = 1\} \\ r_{2,k} &= \#\{\nu \in M_{\infty,k}/N_\nu = 2\} \\ r_k &= r_{1,k} + r_{2,k} - 1 \\ N_k &= r_{1,k} + 2r_{2,k}. \end{aligned}$$

Pour tout $\nu \in M_{\infty,k}$ tel que $k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, on fixe un tel isomorphisme. Comme dans [We], pour tout $\nu \in M_k$, on normalise la mesure de Haar dx_ν de la manière suivante :

- si $\nu \in M_{f,k}$, alors $\int_{\mathcal{O}_{k_\nu}} dx_\nu = 1$
- si $k_\nu = \mathbf{R}$, alors on prend pour dx_ν la mesure de Lebesgue usuelle.
- si $k_\nu = \mathbf{C}$, alors on pose $dx_\nu = -i dz d\bar{z} = 2 dx dy$.

L'entier w_k désigne le nombre de racines de l'unité dans k , d_k la valeur absolue du discriminant de k et R_k le régulateur de k . On note $\mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ le monoïde des idéaux non nuls de \mathcal{O}_k , $\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)$ le sous-monoïde des idéaux principaux non nuls et $h_k = \#\mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)$ le nombre de classes d'idéaux. Lorsque $k = \mathbf{Q}$, il nous arrivera d'identifier $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}})$ à $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$. Si S est un sous-ensemble fini de M_k , on note \mathcal{O}_S , l'anneau des S -entiers.

Le plus souvent nous omettrons k dans ces notations quand le corps de nombres est clairement indiqué par le contexte.

1.2 Hauteurs associées à un faisceau ample

Soient k un corps de nombres, V une variété sur k , \mathcal{L} un faisceau très ample sur V . On choisit $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$. Par hypothèse, on a un plongement :

$$\Phi : V \rightarrow \mathbf{P}_k(\Gamma(V, \mathcal{L})^\vee)$$

où $\Gamma(V, \mathcal{L})^\vee$ désigne le dual de $\Gamma(V, \mathcal{L})$. Une première définition de la hauteur est alors donnée par :

Définition. On définit la *hauteur* de $P \in V(k)$ relativement à \mathcal{L} et $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ par

$$h(P) = \prod_{\nu \in M_k} \sup_{1 \leq i \leq q} |y_i|_\nu$$

où $(y_i)_{1 \leq i \leq q}$ sont des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$ pour la base $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$.

Par la formule du produit, cette hauteur est indépendante du choix des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$. Elle dépend par contre du corps de base k et de la base choisie.

Plus généralement, on peut considérer les hauteurs définies de la manière suivante : pour tout $\nu \in M_k$, on se donne une métrique ν -adique $\|\cdot\|_\nu$ sur \mathcal{L} . On

suppose en outre qu'il existe une base (s_1, \dots, s_q) de $\Gamma(V, \mathcal{L})$ telle que pour presque tout $\nu \in M_f$, pour tout $x \in V(k)$ et tout $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ telle que $s(x) \neq 0$,

$$\|s(x)\|_\nu = \left(\sup_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_\nu \right)^{-1}.$$

Il faut noter que cette condition est alors vérifiée pour toute base. Nous appellerons métrique adélique un tel système de métriques.

Définition. La hauteur d'un point rationnel P de V relativement à \mathcal{L} et au système de métriques est donnée par

$$h(P) = \prod_{\nu \in M_k} \|s(x)\|_\nu^{-1}$$

où s est section de \mathcal{L} non nulle en x . Ce produit est également indépendant du choix de la section. Par abus de langage, nous appellerons hauteur sur V la donnée d'un faisceau très ample \mathcal{L} et d'une métrique adélique sur \mathcal{L} .

Un exemple d'un tel système de métriques consiste à prendre

$$\|s(x)\|_\nu = \begin{cases} \left(\sup_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_\nu \right)^{-1} & \text{si } \nu \in M_f, \\ \sqrt{\left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_\nu^2 + \dots + \left| \frac{s_q(x)}{s(x)} \right|_\nu^2}^{-1} & \text{si } k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}, \\ \left(\left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_\nu + \dots + \left| \frac{s_q(x)}{s(x)} \right|_\nu \right)^{-1} & \text{si } k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

La hauteur utilisée dans [Th] correspond à cette métrique.

Un autre exemple consiste à choisir une famille génératrice finie $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ de $\Gamma(V, \mathcal{L})$ et poser

$$\|s(x)\|_\nu = \inf_{\substack{1 \leq i \leq q \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_\nu.$$

1.3 Sous-variétés accumultrices

Soit U un sous-espace constructible de V défini sur k . On note

$$n_U(H) = \#\{P \in U(k) / h(P) \leq H\}$$

qui est un nombre fini. On s'intéresse au comportement asymptotique de $n_U(H)$ quand H tend vers $+\infty$. On pose

$$\beta_U = \overline{\lim}_{H \rightarrow +\infty} (\log n_U(H) / \log(H)).$$

La constante β_U donne la puissance de H qui intervient dans $n_V(H)$. Un fermé F de V est dit accumulateur si et seulement si pour tout ouvert W de F , il existe un ouvert U de V tel que

$$\beta_W > \beta_U.$$

Cette notion permet de définir une stratification arithmétique sur V qui peut éventuellement être infinie (cf. [Man]). Il est clair que si l'on a un tel fermé F , le comportement asymptotique de $n_V(H)$ reflète la structure de F et non celle de V . C'est pourquoi il est plus intéressant de se placer, lorsque cela est possible, sur le complémentaire U des sous-variétés accumulatrices. C'est ce que nous ferons par la suite.

1.4 Énoncé de la conjecture de Manin

Dans la suite de ce texte, on se placera dans le cas où V est une variété de Fano, c'est à dire une variété projective et lisse dont l'inverse du faisceau canonique ω_V^{-1} est ample. Pour simplifier, je le supposerai très ample. Les hauteurs qu'on utilisera désormais sont relatives au faisceau très ample ω_V^{-1} .

Manin énonce alors la conjecture suivante (cf. en particulier [F,M,T]) :

Conjecture 1.4.1 (Manin) *Si $V(k)$ est dense dans V et si U , le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices, est défini sur k , alors il existe une constante C telle que*

$$n_V(H) \sim CH \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V$.

1.5 Rappel des résultats connus

L'exemple le plus simple de variété de Fano est \mathbf{P}_k^n . Dans ce cas, on a

$$\omega_V = \mathcal{O}(-n-1)$$

et $U = V = \mathbf{P}_k^n$. Le résultat est dû à Schanuel et s'écrit, en remarquant que la hauteur utilisée ici est la puissance $(n+1)$ -ème de celle utilisée dans [Sc] :

Théorème 1.5.1 (Schanuel [Sc])

$$n_V(H) \sim CH \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où C est la constante donnée par

$$C = \frac{h}{\zeta_k(n+1)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} (n+1)^r \frac{R}{w}.$$

Franke, Manin et Tschinkel ont démontré dans [F,M,T] que la conjecture est stable par produit de variétés, compatible avec les résultats de la méthode du cercle et vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées de la forme $V = P \backslash G$ où G est un groupe algébrique semi-simple linéaire et P un sous-groupe parabolique. Dans le cas où $G = GL_{n,k}$, Thunder a donné dans [Th] une majoration explicite du terme résiduel. En outre Batyrev a annoncé avoir démontré la conjecture dans le cas des variétés toriques.

Les résultats à l'origine de ce texte, les théorèmes 8.6.1, 9.6.1, 10.6.1 et 11.6.1 sont des vérifications de cette conjecture dans le cas où V est obtenue en éclatant certains sous-espaces de codimension 2 de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$. Dans le cas particulier où V est obtenue en éclatant trois points, Batyrev et Manin avaient démontré le résultat suivant :

Théorème 1.5.2 (Batyrev, Manin [B-M]) *Si $k = \mathbf{Q}$ et si U désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels sur V , alors il existe des constantes C_1 et C_2 telles que*

$$0 < C_1 < \frac{n_V(H)}{H \log^3 H} < C_2.$$

2 Hauteurs et mesures de Tamagawa sur une variété de Fano

2.1 Expression conjecturale de la constante

Soit k un corps de nombres et V une variété de Fano sur k telle que $\omega_{\bar{V}}^{-1}$ soit très ample. Comme dans [We], on introduit l'ensemble fini S des places de mauvaise réduction de V identifiée avec son plongement dans \mathbf{P}_k^1 . Quitte à augmenter S , V se relève en un schéma projectif et lisse \mathcal{V} au-dessus de \mathcal{O}_S . Pour toute algèbre A sur \mathcal{O}_S , le produit $\mathcal{V} \times_{\mathcal{O}_S} \text{Spec} A$ est noté \mathcal{V}_A et pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S$, le morphisme de Frobenius géométrique défini sur $\text{Pic } \mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}}$, est désigné par $\text{Fr}_{\mathfrak{p}}$. On pose $\bar{V} = V \times_k \bar{k}$. Le terme local de la fonction L associée à $\text{Pic } \bar{V}$ est alors défini par :

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \bar{V}) = \frac{1}{\text{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \text{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid \text{Pic } \mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}}, \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction L_S globale est donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \text{Pic } \bar{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \bar{V}).$$

Lemme 2.1.1. *Le produit eulérien*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \bar{V})$$

converge absolument pour $\text{Re } s > 1$ et la fonction $L_S(s, \text{Pic } \bar{V})$ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} . Cette fonction a un pôle d'ordre $t = \text{rg Pic } V$ en 1.

Démonstration. Soit \mathcal{G} le groupe de Galois de \bar{k} sur k . La suite exacte (1.5.0) dans [C-T,S] fournit la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic } V \rightarrow (\text{Pic } \bar{V})^{\mathcal{G}} \rightarrow \text{Br}(k).$$

Le groupe $\text{Br}(k)$ étant de torsion

$$t = \text{rg Pic } V = \text{rg}(\text{Pic } \bar{V})^{\mathcal{G}}.$$

Or il existe une extension finie de k scindant l'action de \mathcal{G} sur $\text{Pic } \bar{V}$. En tant que \mathcal{G} -module, $(\text{Pic } \bar{V}) \otimes \mathbf{C}$ se décompose donc sous la forme

$$\text{Pic } \bar{V} \otimes \mathbf{C} \rightarrow ((\text{Pic } \bar{V})^{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{C}) \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i$$

où les M_i sont des représentations irréductibles de \mathcal{G} sur \mathbf{C} . Soit K une extension galoisienne de k scindant l'action de \mathcal{G} sur $\text{Pic } \bar{V}$. Soit

$$S' = S \cup \{\mathfrak{p} \in M_f \mid \mathfrak{p} \text{ est ramifié dans } K/k\}.$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S'$, la substitution de Frobenius correspondant à un idéal premier \mathfrak{P} au-dessus de \mathfrak{p} est notée $(\mathfrak{P}, K/k)$ (cf. [Sel] I.8) et

$$L_{\mathfrak{p}}(s, M_i) = \frac{1}{\text{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s}(\mathfrak{P}, K/k) | M_i)}.$$

La fonction L d'Artin associée à M_i est alors définie par le produit eulérien

$$L_{S'}(s, M_i) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S'} L_{\mathfrak{p}}(s, M_i).$$

On a alors la relation

$$L_{S'}(s, \text{Pic } \bar{V}) = \zeta_{k, S'}(s)^t \prod_{i \in I} L_{S'}(s, M_i)$$

D'après [Arti], théorème 7, les produits eulériens $L_{S'}(s, M_i)$ convergent pour $\text{Re } s > 1$ et les fonctions L obtenues se prolongent en des fonctions méromorphes qui sont entières au voisinage de 1. ■

Par ailleurs, la densité locale en $\mathfrak{p} \in M_f - S'$ est définie comme :

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\#\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{N(\mathfrak{p})^{\dim(V)}}.$$

Fixons une métrique adélique $(\|\cdot\|_{\nu})_{\nu \in M_k}$ sur $\omega_{\bar{V}}^{-1}$ et notons h la hauteur correspondante. On va alors définir pour tout $\nu \in M_k$ une mesure ω_{ν} sur $V(k_{\nu})$ d'une manière analogue à celle utilisée dans [We]. Soient x_1, x_2, \dots, x_n des coordonnées locales en $x \in V$. Ces coordonnées définissent un morphisme de variétés f d'un

ouvert U de $V_\nu = V \times k_\nu$ dans \mathbf{A}_k^n et induisent un homéomorphisme d'un ouvert W pour la topologie ν -adique de $V(k_\nu)$ sur $f(W)$ et un morphisme de faisceaux

$$f^* \Omega_{\mathbf{A}_k^n/k} \rightarrow \Omega_{U/k}$$

et donc

$$\omega(f) : f^* \omega_{\mathbf{A}_k^n/k} \rightarrow \omega_{U/k}.$$

Sur W la mesure ω_ν est définie par la relation

$$\omega_\nu = \left\| {}^t \omega(f)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x)) \right\|_\nu dx_1 \dots dx_n.$$

où $dx_{i,\nu}$ est la mesure de Haar normalisée comme ci-dessus. En particulier si la métrique pour ν est définie par une base $(s_i)_{1 \leq i \leq g}$ de $\Gamma(V, \omega_{\bar{V}}^{-1})$, alors

$$\omega_\nu = \frac{1}{\sup_{1 \leq i \leq g} |s_i(f^{-1}(x))(\omega(f)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n))|_\nu} dx_{1,\nu} \dots dx_{n,\nu}.$$

Ces mesures locales se recollent. En effet, soient x_1, \dots, x_n et x'_1, \dots, x'_n deux systèmes de coordonnées définis sur un même ouvert W et correspondant respectivement à f et f' . Il existe un C^ω difféomorphisme

$$\phi : f(W) \rightarrow f'(W)$$

tel que $f' = \phi \circ f$. On a alors la relation

$${}^t \omega(\phi)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right) = \text{Jac}_x(\phi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \left\| {}^t \omega(f')^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right) (f'^{-1}(x')) \right\|_\nu dx'_{1,\nu} \dots dx'_{n,\nu} \\ &= \frac{\left\| {}^t \omega(f)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x)) \right\|_\nu dx'_{1,\nu} \dots dx'_{n,\nu}}{|\text{Jac}_{\phi^{-1}(x')}\phi|_\nu} \\ &= \left\| {}^t \omega(f)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x)) \right\|_\nu dx_{1,\nu} \dots dx_{n,\nu}. \end{aligned}$$

La formule $dx'_{1,\nu} \dots dx'_{n,\nu} = |\text{Jac}_x \phi|_\nu dx_{1,\nu} \dots dx_{n,\nu}$ se démontrant comme dans [We].

Pour tout $\nu \in M_k$, on pose

$$\lambda_\nu = \begin{cases} L_\nu(s, \text{Pic } \bar{V}) & \text{si } \nu \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La mesure de Tamagawa correspondant à h et S est alors définie comme

$$\omega_{h,S} = \sqrt{d_k}^{-\dim V} \prod_{\nu \in M_k} \lambda_\nu^{-1} \omega_\nu.$$

La constante

$$\tau_h(V(\mathbf{A}_k)) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L_S(s, \text{Pic } \overline{V}) \omega_{h,S}(V_{\mathbf{A}_k})$$

où $t = \dim \text{Pic } V$ ne dépend plus du choix fait pour S . Cependant, comme le fait remarquer Swinnerton-Dyer dans le cas d'une surface cubique ([S-D]), la constante C qui apparaît est liée en général au problème de l'approximation faible pour la variété V . Bien que cela n'intervienne pas dans les cas que nous considérerons, nous poserons donc

$$\tau_h(V) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L_S(s, \text{Pic } \overline{V}) \omega_{h,S}(\overline{V(k)})$$

où $\overline{V(k)}$ désigne l'adhérence de $V(k)$ dans $V(\mathbf{A}_k)$.

Lemme 2.1.2. *Pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_k$,*

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V(k_{\mathfrak{p}})) = d_{\mathfrak{p}}(V).$$

Démonstration. Soit (s_1, \dots, s_q) une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$. Il suffit de démontrer que la formule est vraie pour presque tout les \mathfrak{p} tels que

$$\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = \inf_{\substack{1 \leq i \leq q \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_{\mathfrak{p}}.$$

Or pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$, $\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = V(k_{\mathfrak{p}})$ puisque V est complète. L'intégrale peut donc se mettre sous la forme :

$$\int_{\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})} \omega_{\mathfrak{p}} = \sum_{a \in \mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})} \int_{x \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}} \omega_{\mathfrak{p}}.$$

Pour tout $\mathfrak{p} \notin S$, $\omega_{\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}}^{-1}$ est très ample. Fixons donc un $\mathfrak{p} \notin S$ vérifiant les conditions ci-dessus. Soit $a \in \mathcal{V}_{\mathfrak{p}}$. On considère des coordonnées locales x_1, \dots, x_n sur un ouvert $W \supset \{x \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}\}$. On note f le morphisme correspondant et

$$Y_i(x) = s_i(f^{-1}(x))(\omega(f)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)).$$

Comme $\omega_{\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}}^{-1}$ est très ample, pour tout $x \in W$, on a la relation

$$(Y_i(x), 1 \leq i \leq q) = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}.$$

Donc

$$\int_{x \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}} \omega_{\mathfrak{p}} = \int_{x \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}} dx_{1,\mathfrak{p}} dx_{2,\mathfrak{p}} \dots dx_{n,\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-\dim V}. \quad \blacksquare$$

Remarque. Le choix des coefficients $\lambda_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \bar{V})$ pour rendre convergent le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \bar{V})}$$

est inspiré de l'article de Bloch (cf. [Bl], p. 69). On peut l'interpréter de la manière suivante. Par la formule de Lefschetz (cf. [Se3]), on a, si $\mathfrak{p} \in M_f - S$ et si l est un nombre premier ne divisant pas $N(\mathfrak{p})$,

$$\#\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum (-1)^i \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l)).$$

Notons $n = \dim V$. La variété $\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}$, étant lisse, on a un isomorphisme :

$$H_{\text{ét}}^{2n}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_l.$$

Comme $\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}$ est projective, $\Gamma(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}})^* = \bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}^*$. Par ailleurs, $\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}$ étant de Fano, $\text{Pic}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \xrightarrow{\sim} \text{NS}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ et $\text{Pic}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ est sans torsion. En outre, $\text{Br}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ est de torsion. La suite exacte

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow 0$$

fournit donc

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l) &= 0 \\ \text{Pic}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Q}_l &\xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l(1)). \end{aligned}$$

Par dualité de Poincaré (cf. [Mi], corollaire VI.11.2) on en déduit que

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^{(2n-1)}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l) &= 0 \\ H_{\text{ét}}^{(2n-2)}(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l(n-1)) &\xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l(1))^{\vee} \xrightarrow{\sim} (\text{Pic } \mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}} \otimes \mathbf{Q}_l)^{\vee}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{p}}(V) &= 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | \text{Pic } \mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}} \otimes \mathbf{Q}_l) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(-1)^i}{N(\mathfrak{p})^{\dim V}} \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l)). \end{aligned}$$

Or, d'après la conjecture de Weil sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (cf. [De] théorème 1.6),

$$\left| \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | H^i(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l)) \right| \leq \dim H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l) N(\mathfrak{p})^{\frac{i}{2}}.$$

On obtient donc que

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | \text{Pic } \mathcal{V}_{\bar{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}} \otimes \mathbf{Q}_l) + O\left(\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Par conséquent, le produit

$$\prod_{p \in M_f - S} \frac{d_p(V)}{L_p(1, \text{Pic } \overline{V})}$$

converge. Comme l'a indiqué Swinnerton-Dyer dans [S-D], on pourrait donc aussi utiliser la série L associée à $H_{\text{ét}}^2(\overline{V}, \mathbf{Q}_l(1))$ qui présente l'avantage de pouvoir être définie en toutes les places et vérifie des équations fonctionnelles. Cependant, dans les démonstrations de ce texte, les termes correcteurs apparaissent directement comme valeurs de la fonction L associée au groupe de Picard et c'est pour cette raison que nous avons utilisée cette définition de la mesure de Tamagawa.

Soit t le rang du groupe de Picard de V . L'image de $\text{Pic } V$ dans $\text{Pic } V \otimes \mathbf{R}$ est un réseau. Le groupe $\Lambda^t(\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})$ contient donc un générateur canonique et on obtient un isomorphisme

$$\Lambda^{t-1}(\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})^\vee \xrightarrow{\sim} \text{Pic } V \otimes \mathbf{R}$$

Par conséquent un élément x de $\text{Pic } V$ définit une mesure θ_x sur

$$\mathcal{H}_x(\lambda) = \{y \in (\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})^\vee / y(x) = \lambda\}.$$

On convient que si $t = 1$ et si x est un générateur de $\text{Pic } V$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\theta_x(\mathcal{H}_x(\lambda)) = 1.$$

On note $C_{\text{eff}}^\vee(V)$ l'ensemble des $y \in (\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})^\vee$ tels que pour tout diviseur effectif D de V on ait

$$y([D]) > 0.$$

Définition. Avec les notations ci-dessus, on pose

$$\alpha_c(V) = \theta_{\omega_V^{-1}}(C_{\text{eff}}^\vee(V) \cap \mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1))$$

et

$$C_h(V) = \alpha_c(V) \tau_h(V).$$

2.2 La conjecture de Manin raffinée

Les différents exemples donnés dans la suite de ce texte vérifient la formule suivante:

Formule empirique 2.2.1. *On suppose que $V(k)$ est dense dans V et que le complémentaire U des sous-variétés accumulatrices est défini sur k . Alors*

$$n_v(H) \sim C_h(V) H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V$.

Il serait sans doute prématuré de conjecturer cette formule dans le cas général. Il paraît relativement plus raisonnable d'énoncer la conjecture suivante.

Conjecture 2.2.2. *Si $V(k)$ est dense dans V et si U le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices est défini sur k , alors il existe une constante $\alpha(V) \in \mathbf{Q}^*$ telle que pour toute métrique sur ω_V^{-1}*

$$n_U(H) \sim \alpha(V)\tau_h(V)H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V$.

2.3 Présentation des résultats

Les principaux résultats de ce texte sont les suivants :

- La formule 2.2.1 est stable par produit de variétés (corollaire 3.3).
- Elle coïncide avec les résultats de Schanuel et de Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées (théorèmes 6.1.1 et 6.2.2) si le groupe est quasi-déployé sur k .
- Elle est compatible avec les résultats de la méthode du cercle (proposition 4.2.1).
- Elle est également vérifiée par les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ (théorèmes 8.6.1, 9.6.1 et 10.6.1), par celle obtenue en éclatant le 0-cycle $D = (0 : 1 : i) + (0 : 1 : -i)$ sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ (théorème 11.6.1) ainsi que par la variété de Fano obtenue en éclatant les sous-espaces de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$ définis par $X_i = X_j = 0$ pour $i \neq j$ (théorème 8.6.1). En outre, la plus grande partie des démonstrations des théorèmes 8.6.1, 9.6.1, 10.6.1 et 11.6.1 se généralisent à un corps de nombres quelconque.

Dans les différents résultats ci-dessus la formule est vérifiée pour des métriques particulières sur ω_V^{-1} . L'objet de la partie 5 est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que la constante $\alpha(V)$ soit indépendante de la métrique. Cette condition est vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées si le groupe est quasi-déployé (proposition 6.2.13). Par conséquent, la formule 2.2.1 est valable pour ces variétés indépendamment du choix de la métrique.

3 Compatibilité de la conjecture avec le produit de variétés

Nous allons maintenant démontrer que la conjecture 2.2.1 est compatible avec le produit de variétés.

Proposition 3.1. *Si V_1 et V_2 sont des variétés de Fano telles que $V_1 \times V_2(k) \neq \emptyset$, h_1 et h_2 des hauteurs sur V_1 et V_2 respectivement, $t_1 = \text{rg Pic } V_1$ et $t_2 = \text{rg Pic } V_2$, alors*

$$C_{h_1 h_2}(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1 - 1)!(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} C_{h_1}(V_1) C_{h_2}(V_2).$$

Lemme 3.2.

$$\alpha_c(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1 - 1)!(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} \alpha_c(V_1) \alpha_c(V_2).$$

Démonstration. D'après le théorème d'annulation de Kodaira, on a

$$H^i(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) = \{0\} \text{ si } i > 0.$$

En particulier, $H^1(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) = \{0\}$. Donc, d'après [Ha] (exercice 3.12.6), on obtient un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{Pic } V_1 \times \text{Pic } V_2 &\xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V_1 \times V_2) \\ (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) &\mapsto \mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2 = \pi_1^* \mathcal{L}_1 \otimes \pi_2^* \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

En outre, comme $V_1 \times V_2(k) \neq \emptyset$, $\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2$ possède une section si et seulement si \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 en ont une. Si on note $C_{\text{eff}}(V)$ le cône des classes de diviseurs effectifs dans $\text{Pic } V$, l'isomorphisme ci-dessus induit donc une bijection

$$C_{\text{eff}}(V_1 \times V_2) \xrightarrow{\sim} C_{\text{eff}}(V_1) \times C_{\text{eff}}(V_2).$$

Enfin, comme V_1 et V_2 sont non singulières, on a, d'après [Ha] (page 187), la relation

$$\omega_{V_1 \times V_2} = \omega_{V_1} \boxtimes \omega_{V_2}$$

et la métrique sur $\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}$ est le produit des métriques induites.

Avec les notations de la fin de la partie 2,

$$\begin{aligned} \alpha_c(V_1 \times V_2) &= \theta_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(1)) \\ &= \theta_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1) \times C_{\text{eff}}^{\vee}(V_2) \cap \mathcal{H}_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(1)). \end{aligned}$$

Mais

$$\mathcal{H}_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(1) = \{(u, v) \in \prod_{i=1}^2 (\text{Pic}(V_i) \otimes \mathbf{R})^{\vee} / u(\omega_{V_1}^{-1}) + v(\omega_{V_2}^{-1}) = 1\}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} &\theta_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(1)) \\ &= \int_0^1 \theta_{\omega_{V_1}^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_1}^{-1}}(u)) \theta_{\omega_{V_2}^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_2) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_2}^{-1}}(1-u)) du \\ &= \prod_{i=1}^2 \theta_{\omega_{V_i}^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_i) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_i}^{-1}}(1)) \int_0^1 u^{t_1-1} (1-u)^{t_2-1} du \\ &= \frac{(t_1 - 1)!(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} \prod_{i=1}^2 \alpha_c(V_i) \end{aligned}$$

ce qui montre la formule. ■

Démonstration de la proposition 3.1. Comme $V_1 \times V_2(k) = V_1(k) \times V_2(k)$, on obtient que $\tau_{h_1 h_2}(V_1 \times V_2) = \tau_{h_1}(V_1) \tau_{h_2}(V_2)$, ce qui montre la proposition. ■

Corollaire 3.3. Si V_1 et V_2 sont des variétés de Fano et si pour $i = 1, 2$ le complémentaire U_i des sous-variétés accumulatrices vérifie

$$n_{U_i}(H) = C_{h_i}(V_i) H \log^{t_i-1} H + O(H \log^{t_i-2} H)$$

où $t_i = \text{rg Pic } V_i$, alors

$$n_{U_1 \times U_2}(H) = C_{h_1 h_2}(V_1 \times V_2) H \log^{(t_1+t_2-1)} H + O(H \log^{(t_1+t_2-2)} H).$$

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 3.1 et de la proposition 2 de [F,M,T]. ■

4 Le cas des intersections complètes non singulières

4.1 Domaine fondamental pour l'action des unités

Nous allons maintenant exprimer la compatibilité de la constante définie dans la partie 2 avec celle qui serait obtenue par la méthode du cercle.

Soit $W \subset \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\}$ une intersection complète non singulière donnée par les équations

$$f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$$

où f_i est une forme homogène de degré d_i pour $1 \leq i \leq m$. Soit

$$\pi : \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_k^n$$

la projection canonique. Soit V l'image de W par π . On fait les hypothèses suivantes :

- V vérifie l'approximation faible, i.e. $V(k)$ est dense dans $V(\mathbf{A}_k)$.
- $\dim V \geq 3$ et $n + 1 > \sum_{i=1}^m d_i$.

Alors V est une variété de Fano. En effet $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(n + 1 - \sum_{i=1}^m d_i)$. On pose

$$\delta = n + 1 - \sum_{i=1}^m d_i > 0.$$

Soit $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ une famille génératrice finie de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ et $(Y_i)_{1 \leq i \leq q}$ les fonctions homogènes de degré δ correspondant aux s_i . La hauteur h correspondante est donnée par

$$\forall x \in W(k), h(\pi(x)) = \prod_{\nu \in \mathcal{M}_k} \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x)|_\nu.$$

Afin de simplifier la démonstration, nous prendrons comme polynômes $(Y_i)_{1 \leq i \leq q}$ les monômes de degré δ .

Le problème est que la méthode du cercle donne des résultats sur le cône W , alors qu'ici on se place sur V . L'objet des notations qui suivent est de trouver un système de représentants de V dans W . Comme dans [Sc] on définit un domaine fondamental sous l'action des unités de la manière suivante: soit \log_h l'application définie par

$$\begin{aligned} \log_h : \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu) &\rightarrow \prod_{\nu \in M_\infty} \mathbf{R} \\ (x_\nu)_{\nu \in M_\infty} &\mapsto \left(\log \left(\sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x_\nu)|_\nu \right) \right)_{\nu \in M_\infty}. \end{aligned}$$

D'après le théorème des unités, le morphisme canonique

$$\begin{aligned} \rho : U_k &\rightarrow \prod_{\nu \in M_\infty} \mathbf{R} \\ u &\mapsto (\log |u|_\nu^\delta)_{\nu \in M_\infty} \end{aligned}$$

a pour noyau le groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k et pour image un réseau L de rang r dans l'hyperplan P défini par $\sum_{\nu \in M_\infty} y_\nu = 0$. En outre, ce réseau étant l'image du réseau usuel par δId , $\text{Det } L = \delta^r R$. L'application \log_h est compatible avec l'action des unités qui agissent de manière diagonale sur $\prod_{\nu \in M_\infty} k_\nu^{n+1}$ et par l'intermédiaire de ρ sur $\prod_{\nu \in M_\infty} \mathbf{R}$. On projette $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ sur P selon $(N_\nu)_{\nu \in M_\infty}$

$$\begin{aligned} \text{pr} : \mathbf{R}^{r_1+r_2} &\rightarrow P \\ (y_\nu)_{\nu \in M_\infty} &\mapsto \left(y_\nu - \frac{N_\nu}{N} \sum_{\lambda \in M_\infty} y_\lambda \right)_{\nu \in M_\infty}. \end{aligned}$$

On choisit u_1, \dots, u_r une base de L . Soit $(u_i^\vee)_{1 \leq i \leq r}$ la base duale. On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} / 0 \leq u_i^\vee(\text{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta_h = \log_h^{-1}(F).$$

Lemme 4.1.1 (Schanuel [Sc]) *L'ensemble Δ_h vérifie :*

- (i) Δ_h est stable sous $\mu_\infty(k)$,
- (ii) $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta_h \cap \Delta_h = \emptyset$,
- (iii) $\bigcup_{u \in U_k} u\Delta_h = \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu)$.

Pour tout $x \in (\mathbf{A}_k)^{n+1}$, on note

$$h_\infty(x) = \prod_{\nu \in M_\infty} \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x_\nu)|_\nu$$

et $x_\infty = (x_\nu)_{\nu \in M_\infty}$. Pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$, soit $\Phi_{\mathfrak{b}, H} : W(\mathbf{A}_k) \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction caractéristique des $x \in W(\mathbf{A}_k)$ tels que

$$\begin{cases} x_\infty \in \Delta_h, \\ \mathfrak{b}_\mathfrak{p} | (x_i)_\mathfrak{p} \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in M_f \text{ et } 0 \leq i \leq n, \\ h_\infty(x) \leq H. \end{cases}$$

Soit $j : W(k) \rightarrow W(\mathbf{A}_k)$ l'application naturelle. La méthode du cercle donne alors une majoration du terme $R_\mathfrak{b}$ défini par la relation

$$\sum_{x \in W(k)} \Phi_{\mathfrak{b}, H}(x) = \int_{W(\mathbf{A}_k)} \Phi_{\mathfrak{b}, H}(x) \omega_{\text{HL}}(x) + R_\mathfrak{b}(H)$$

où ω_{HL} est la forme de Leray sur $W(\mathbf{A}_k)$ définie par $\frac{1}{\sqrt{d}^{n-m+1}} \prod_{\nu \in M_k} \omega_{L, \nu}$, où la forme locale $\omega_{L, \nu}$ est caractérisée par la relation :

$$\omega_{L, \nu} \wedge f^* \left(\bigwedge_{i=1}^m dx_{i, \nu} \right) = \bigwedge_{i=0}^n dx_{i, \nu},$$

$f : \mathbf{A}_k^{n+1} \rightarrow \mathbf{A}_k^m$ désignant le morphisme défini par les f_i .

4.2 Compatibilité de la conjecture avec la méthode du cercle

On note $\mu : \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \rightarrow \mathbf{Z}$ la fonction de möbius.

Proposition 4.2.1. (a) *L'entier $n_\nu(H)$ vérifie :*

$$n_\nu(H) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, HN(\mathfrak{a})^\delta}(x).$$

(b) *On a la relation :*

$$\frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \int_{W(\mathbf{A}_k)} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, HN(\mathfrak{a})^\delta}(x) \omega_{\text{HL}}(x) = C_h(V)H.$$

Remarque. La méthode du cercle, lorsqu'elle s'applique fournit donc une majoration de $|n_\nu(H) - C_h(V)H|$.

Démonstration.

• Nous allons tout d'abord démontrer l'assertion (a) de la proposition : on a la relation

$$n_\nu(H) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{F}(\mathcal{O}_k)} n_{W,\mathfrak{a}}(H)$$

où

$$\begin{aligned} n_{W,\mathfrak{a}}(H) &= \#\{x \in W(k)/h(x) \leq H, (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a} \text{ et } j(x) \in \Delta_h\} \\ &= \#\{x \in W(k)/h_\infty(x) \leq HN(\mathfrak{a})^\delta, (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a} \text{ et } j(x) \in \Delta_h\}. \end{aligned}$$

La formule d'inversion de Möbius permet alors de passer de la relation

$$(x_0, \dots, x_n) = \mathfrak{a}$$

à la relation

$$(x_0, \dots, x_n) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

donnant l'égalité

$$n_{W,\mathfrak{a}}(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, HN(\mathfrak{a})^\delta}(x). \quad \blacksquare$$

• Nous allons maintenant démontrer la deuxième assertion de la proposition 4.2.1. Celle-ci découle des lemmes qui suivent.

Soit $f : \mathbf{A}_{k_\nu}^{n+1} \rightarrow \mathbf{A}_{k_\nu}^m$ l'application induite par les f_i et $h_\nu : k_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie par

$$h_\nu(x) = \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x)|_\nu.$$

Soit V_0 l'ouvert de $V(k_\nu)$ défini par $x_0 \neq 0$. Soit V_1 un ouvert pour la topologie ν -adique contenu dans V_0 sur lequel x_1, \dots, x_{n-m} définit un système de coordonnées. En tout point $x \in \mathbf{P}^n(k_\nu)$ tel que $x_0 = 1$, f induit une application

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x : \quad \mathbf{A}_{k_\nu}^m &\rightarrow \mathbf{A}_{k_\nu}^m \\ (y_i)_{1 \leq i \leq m} &\mapsto (f_j(1, x_1, \dots, x_{n-m}, x_{n-m+1} + y_1, \dots, x_n + y_m))_{1 \leq j \leq m} \end{aligned}$$

Lemme 4.2.2. *Sur l'ouvert V_1*

$$\omega_\nu = \frac{1}{h_\nu(\rho^{-1}(x)) |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}x}|_\nu} dx_{1,\nu} \dots dx_{n-m,\nu}$$

où ρ est l'application $V_1 \rightarrow \mathbf{A}_{k_\nu}^{n-m}$.

Démonstration. Rappelons tout d'abord la construction de l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_V(\delta) \xrightarrow{\sim} \omega_V^{-1}.$$

Soit U_0 l'ouvert de $\mathbf{P}_{k_\nu}^n$ défini par $x_0 \neq 0$. On a une suite exacte :

$$\mathcal{O}_{U_0}^m \otimes \mathcal{O}_{V_0} \xrightarrow{\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)} \mathcal{O}_{U_0}^n \otimes \mathcal{O}_{V_0} \rightarrow \Omega_{V_0/k}^1 \rightarrow 0$$

Donc si $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V(\delta))$, g est donné par un polynôme homogène de degré δ et l'élément associé $\theta \in \Gamma(V_0, \omega_V^{-1})$ est défini par la relation suivante: pour tout $x = (1 : x_1, \dots : x_n) \in V_0$ tel que $g(x) \neq 0$,

$$g(x)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \theta^\vee(x) \wedge f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)(x)$$

où θ^\vee est la section de ω_ν duale de θ . Pour tout $x \in V_0$, on a alors

$$\|\theta(x)\|_\nu = \frac{|g(1, x_1, \dots, x_n)|_\nu}{h_\nu(1, x_1, \dots, x_n)}.$$

La section ${}^t\omega(\rho)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n-m}} \right)$ de ω_V^{-1} correspond donc à une fonction rationnelle homogène g tel que, pour tout $x = (1, x_1, \dots, x_n) \in V_0$,

$$g(x)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-m} \wedge f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m).$$

La fonction définie par

$$g(x) = \left(\text{Jac}_0 \tilde{f}_x \right)^{-1}$$

convient donc. Le lemme s'en déduit directement. ■

Lemme 4.2.3. Soient $\mathfrak{p} \in M_f$, g et h deux fonctions positives et localement constantes sur $k_\mathfrak{p}^{n+1} - \{0\}$ telles que

$$\forall \lambda \in k_\mathfrak{p}, \forall x \in k_\mathfrak{p}^{n+1}, g(\lambda x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^p g(x) \text{ et } h(\lambda x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^q h(x)$$

où p et q sont des entiers tels que $p + q = n + 1$. On suppose en outre que pour tout $x \in k_\mathfrak{p}^{n+1} - \{0\}$, il existe $\lambda \in k_\mathfrak{p}$ tel que $h(x) = |\lambda|_\mathfrak{p}^q$. Soit U_1 un ouvert de $\mathbf{P}^n(k_\mathfrak{p})$ pour la topologie ν -adique contenu dans l'ouvert $x_0 \neq 0$ et sur lequel gh ne s'annule pas. On note CU_1 le cône au-dessus de U_1 . On a alors la relation

$$\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \zeta_\mathfrak{p}(q) \int_{U_1} \frac{1}{gh} dx_1 \dots dx_n = \int_{\{x \in CU_1 / h(x) \leq 1\}} \frac{1}{g} dx_0 \dots dx_n.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour un ouvert U_1 où les fonctions $g(1, x_1, \dots, x_n)$ et $h(1, x_1, \dots, x_n)$ sont constantes. On peut également supposer que U_1 est de la forme $B(P_0, \epsilon)$ pour un $P_0 \in U_0$ et un $\epsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On se ramène alors à $g = 1$ sur U_1 . Comme h vérifie la condition

$$\forall x \in k_p^{n+1} - \{0\}, \exists \lambda \in k_p^*/h(x) = |\lambda|_p^q$$

on peut également se ramener à $h = 1$ sur U_1 . On peut ensuite supposer $\epsilon = 1$ et $P_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$. On obtient que le résultat du lemme vaut à une constante multiplicative fixe près. La valeur de la constante est alors obtenue en calculant les deux termes pour $U_1 \subset \mathbf{A}_{k_p}^{q-1} \times \mathbf{A}_{k_p}^{n-q+1}$ défini par $|x_i - 1| < 1$ si $i \geq q$,

$$h = \sup_{0 \leq i \leq q-1} |x_i|_p^q \text{ et } g = \sup_{q \leq i \leq n} |x_i|_p^{n-q+1}$$

Pour ce faire, il suffit de constater que, après s'être ramené à $g = n + 1$, l'intégrale de droite est, d'après le lemme 2.1.2, $d_p(\mathbf{P}_{k_p}^n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{N(p)^i}$ tandis que l'intégrale de gauche vaut 1. ■

Lemme 4.2.4. Soit $p \in M_f$. Pour tout $x \in W(k_p)$, notons

$$h_p(x) = \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x)|_p.$$

Alors

$$\int_{\{x \in W(k_p)/h_p(x) \leq 1\}} \omega_{L,p}(x) = \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right) \zeta_p(\delta) \omega_p(V_p).$$

Démonstration. Ce lemme résulte du lemme 4.2.2 et du lemme 4.2.3 que l'on applique avec $g = |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}(x)}|_p$ qui, vue comme fonction en les coordonnées homogènes, vérifie l'équation du lemme 4.2.3 avec $p = \sum_{i=1}^m (d_i - 1)$. En effet la mesure de Leray est définie localement par

$$\frac{1}{|\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}(x)}|_p} dx_{0,\nu} \dots dx_{n-m,\nu}. \quad \blacksquare$$

Lemme 4.2.5.

$$\prod_{\nu \in M_\infty} \int_{\mathcal{X}_{\{x \in \Delta_h/h_\infty(x) \leq H\}}} \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_{L,\nu} = H \frac{\sqrt{d}w}{h\delta} \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1) \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(V_\nu).$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat analogue pour un ouvert U_1 pour le produit des topologies ν -adiques sur lequel $x_{1,\nu}, \dots, x_{n-m,\nu}$ définissent un système de coordonnées. On note CU_1 le cône au-dessus de U_1 . Par définition de la mesure de Leray, le membre de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} L &= \int_{\{x \in \Delta_h \cap CU_1 / h_\infty(x) \leq H\}} \prod_{\nu \in M_\infty} \frac{1}{|\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}(x)}|_\nu} dx_{0,\nu} \dots dx_{n-m,\nu} \\ &= H \int_{\mathcal{V}_1} \frac{1}{\prod_{\nu \in M_\infty} |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}(x)}|_\nu} \prod_{\nu \in M_\infty} dx_{0,\nu} \dots dx_{n-m,\nu} \end{aligned}$$

où \mathcal{V}_1 désigne l'ensemble des $x \in CU_1$ tels que

$$\begin{cases} \prod_{\nu \in M_\infty} \sup_{0 \leq i \leq q} |Y_i(x_\nu)|_\nu \leq 1 \\ (\log(\sup_{0 \leq i \leq q} |Y_i(x_\nu)|_\nu))_{\nu \in M_\infty} \in F. \end{cases}$$

Notons $M_{\mathbf{R}} = \{\nu \in M_\infty / N_\nu = 1\}$ et $M_{\mathbf{C}} = \{\nu \in M_\infty / N_\nu = 2\}$. Pour tout $\nu \in M_{\mathbf{C}}$, on utilise des coordonnées polaires pour $x_{0,\nu}$. On note

$$\iota : \prod_{\nu \in M_\infty} \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_\nu \dim V} \rightarrow \prod_{\nu \in M_\infty} k_\nu^{\dim V + 1}$$

le produit des applications définies par

$$\begin{aligned} \iota_\nu : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_\nu \dim V} &\rightarrow k_\nu^{\dim V + 1} \\ (x_0, (x_{j,l})_{\substack{1 \leq j \leq \dim V \\ 1 \leq l \leq 2}}) &\mapsto (x_0, (x_{j,1} + ix_{j,2})_{1 \leq j \leq \dim V}) \end{aligned}$$

si $N_\nu = 2$ et de manière similaire si $\nu \in M_{\mathbf{R}}$. On obtient alors

$$L = H 2^{r_2(\dim V + 1)} (2\pi)^{r_2} 2^{r_1} \int_{\mathcal{V}_2} \frac{\prod_{\nu \in M_{\mathbf{C}}} x_{0,\nu}}{\prod_{\nu \in M_\infty} |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}\iota(x)}|_\nu} dx$$

où \mathcal{V}_2 désigne l'ensemble des $x \in \prod_{\nu \in M_\infty} \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_\nu \dim V}$ tels que

$$\begin{cases} \iota(x) \in CU_1 \\ \prod_{\nu \in M_\infty} h_\nu \iota_\nu(x_\nu) \leq 1 \\ (\log(h_\nu \iota_\nu(x_\nu)))_{\nu \in M_\infty} \in F. \end{cases}$$

On fait alors le changement de variables

$$\begin{aligned} v_\nu &= h_\nu \iota_\nu(x_\nu) \quad \text{pour } \nu \in M_\infty \\ v_{j,\nu} &= \frac{x_{j,\nu}}{x_{0,\nu}} \quad \text{pour } \nu \in M_\infty \text{ et } 1 \leq j \leq N_\nu \dim V. \end{aligned}$$

La Jacobienne est le produit pour $\nu \in M_\infty$ des déterminants suivants :

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_0} & \frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_{N_\nu \dim V}} \\ -\frac{x_1}{x_0^2} & \frac{1}{x_0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_2}{x_0^2} & 0 & \frac{1}{x_0} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{x_{N_\nu \dim V}}{x_0^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_0} \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{x_0^{N_\nu \dim V}} \left(\frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{N_\nu \dim V} \frac{x_i}{x_0^2} x_0 \frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{1}{x_0^{N_\nu \dim V + 1}} \left(\sum_{i=0}^{N_\nu \dim V} x_i \frac{\partial h_\nu t_\nu}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{N_\nu \delta}{x_0^{N_\nu \dim V + 1}} h_\nu t_\nu \\
&= \frac{N_\nu \delta}{x_0^{N_\nu (\dim V - \delta) + 1}} h_\nu t_\nu \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{nN_\nu}}{x_0} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.2 et le fait que la fonction $x \mapsto |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}(x)}|_\nu$ est homogène de degré $N_\nu \sum_{i=1}^m (d_i - 1)$, on obtient

$$L = H(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} 2^{r_2} \frac{1}{2^{r_2} \delta^{r_1 + r_2}} \left(\prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu \right) (U_1) \int_{\substack{\prod_{\nu \in M_\infty} u_\nu \leq 1 \\ (\log u_\nu)_{\nu \in M_\infty} \in \mathbb{F}}} \prod_{\nu \in M_\infty} du_\nu.$$

On fait alors le changement de variables $w_0 = \prod_{\nu \in M_\infty} v_\nu$ et $w_i = u_i^\vee(\text{pr}(v))$ si $1 \leq i \leq r$ où u_i désigne la base du réseau L introduite dans la partie 4.1. Comme dans [Sc], on en déduit que

$$L = H(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} \frac{1}{\delta^{r_1 + r_2}} \left(\prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu \right) (U_1) \delta^r R.$$

La formule de Dirichlet montre alors le résultat. ■

Lemme 4.2.6.

$$\alpha_c(V) = \frac{1}{\delta}.$$

Démonstration. Comme $\dim V \geq 3$, le théorème de Lefschetz (cf. [SGA2] exposé XII) implique que $\text{Pic } V \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}\mathcal{O}_V(1)$. Or $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(\delta)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\alpha_c(V) &= \theta_{\omega_V^{-1}}(\mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \cap C_{\text{eff}}^\vee(V)) \\
&= \frac{1}{\delta}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Démonstration de l'assertion (b) de la proposition 4.2.1. D'après ce qui précède, $\text{Pic } V \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$. Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 impliquent donc que

$$\int_{W(\mathbf{A}_k)} \phi_{\text{ab}, HN(a)^\delta \omega_{\text{HL}}} = H \frac{w \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1)}{\delta h \sqrt{d}^{\dim V}} \frac{\zeta_k(\delta)}{N(\mathfrak{b})^\delta} \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(V_\nu) \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \frac{\omega_\mathfrak{p}(V_\mathfrak{p})}{L_\mathfrak{p}(1, \text{Pic } V)}.$$

Le terme de gauche dans l'assertion (b) de la proposition 4.2.1 s'écrit donc

$$H \frac{\zeta_k(\delta)}{\delta} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^\delta} \tau_h(V(\mathbf{A}_k)).$$

Mais

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^\delta} = \frac{1}{\zeta_k(\delta)}$$

et $\alpha_c(V) = \frac{1}{\delta}$. ■

En appliquant le théorème 1 de [Bi], on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.7. *Si $d_1 = \dots = d_m = d \geq 2$, $k = \mathbf{Q}$, si $n > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$ et si h est défini par une famille génératrice $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ telle que les s_i correspondent à des monômes M_i de degré δ avec $M_i = X_i^\delta$ pour $0 \leq i \leq n$ alors*

$$n_\nu(H) \sim C_h(V)H \text{ lorsque } H \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Comme $k = \mathbf{Q}$, on a $\Delta_h = \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu)$. En outre, on a supposé que les $n+1$ premières sections de la famille choisie sont induites par les monômes X_i^δ . On peut donc appliquer le théorème 1 de [Bi] pour obtenir que

$$|R_{\mathbf{Z}}(B^\delta)| \leq C B^{\delta-\epsilon}$$

avec des constantes C et ϵ strictement positives. Par conséquent

$$R_{(n)}(B^\delta) \leq C \frac{B^{\delta-\epsilon}}{n^\delta} \leq C \left(\frac{B}{n}\right)^{\delta-\epsilon}.$$

Soit $g(B, n) = R_{(n)}(B^\delta)$. On déduit du lemme 12 de [Sc] que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^+} \mu(n)g(B, n) = O(B^{\delta-\epsilon}). \quad \blacksquare$$

5 Indépendance vis-à-vis de la construction de la hauteur

On note V une variété de Fano telle que ω_V^{-1} soit très ample. Les hauteurs considérées ici sont définies par des systèmes de métriques relatifs au faisceau ω_V^{-1} . On reprend les notations de la partie 2.

Définition. On fixe un ouvert U de V . Pour toute hauteur h sur V et tout ouvert W de $V(\mathbf{A}_k)$ on note

$$n_{h,W}(H) = \#\{x \in U(k) \cap W / h(x) \leq H\}.$$

On dira qu'un ouvert W de $V(\mathbf{A}_k)$ est bon si et seulement si il existe une hauteur h sur V telle que $\omega_{h,S}(\partial W) = 0$. Cette condition est alors vérifiée pour toute hauteur h .

On dit alors que les points rationnels de V sont équidistribués sur U ou que V vérifie la propriété (E_U) si et seulement si il existe un choix de la hauteur h sur V tel que pour tout bon ouvert W de $U(\mathbf{A}_k)$

$$\begin{aligned} \frac{n_{h,W}(H)}{n_U(H)} &\rightarrow \frac{\omega_{h,S}(\overline{V(k)} \cap W)}{\omega_{h,S}(\overline{V(k)})} \\ H &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Remarques.

- (1) Il est clair que si V contient des sous-variétés accumulatrices alors V ne vérifie pas (E_V) . La question de savoir si (E_U) est vérifiée n'est en fait pertinente que si U est inclu dans le complémentaire des sous-variétés accumulatrices. C'est ce que l'on suppose par la suite.
- (2) La raison pour laquelle on ne considère que les bons ouverts est que la condition ne peut être vérifiée par tous les ouverts W . En effet soit $\nu_0 \in M_\infty$. L'ensemble $V(k)$ étant dénombrable, $\omega_{\nu_0}(V(k)) = 0$. Or la mesure ω_{ν_0} est régulière. Pour tout $\epsilon \in \mathbf{R}_+$, il existe donc un ouvert W_{ν_0} de $V(k_{\nu_0})$ tel que $V(k) \subset W_{\nu_0}$ et $\omega_{\nu_0}(W_{\nu_0}) < \epsilon$. Prenons $W = W_{\nu_0} \times \prod_{\substack{\nu \in M_k \\ \nu \neq \nu_0}} V(k_\nu)$. On obtient que

$$n_{h,W}(H) = n_U(H)$$

mais

$$\omega_{h,S}(\overline{V(k)} \cap W) \leq \epsilon \omega_{h,S}(V(\mathbf{A}_k)).$$

Proposition 5.1. (a) La propriété (E_V) est compatible avec les résultats de la méthode du cercle au sens de la proposition 4.2.1.

(b) Si V vérifie (E_U) pour une hauteur h alors, pour toute fonction continue f sur $V(\mathbf{A}_k)$, on a

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\{x \in U(k), h(x) \leq H\}} f(x)}{n_U(H)} = \frac{\int f \omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))}.$$

(c) Si V vérifie (E_U) et la formule 2.2.1 pour une même hauteur h , alors elle les vérifie pour toute hauteur relative au faisceau ω_V^{-1} .

(d) Si V vérifie la conjecture de Manin raffinée, alors elle vérifie la propriété (E_U) où U désigne le complémentaire des sous-variétés accumulatrices.

Remarque. On verra par la suite que la propriété (E_V) est vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé.

Démonstration de la proposition.

• L'assertion (a) se démontre comme la proposition 4.2.1. En effet, les démonstrations des lemmes 4.2.3 et 4.2.5 montrent que si g est de la forme $\prod_{\nu \in S'} g_\nu$ pour un ensemble fini S' de places de k et g_ν des fonctions continues sur $V(k_\nu)$, alors, avec les notations de la partie 4, on a

$$\int_{W(\mathbf{A}_k)} g \circ \pi \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, HN(\mathfrak{a})^\delta} \omega_{\text{HL}} = H \frac{w \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1)}{\delta h} \frac{\zeta_k(\delta)}{N(\mathfrak{b})^\delta} \int_{V(\mathbf{A}_k)} g \omega_{h,\emptyset}.$$

Or si O est un bon ouvert de $V(\mathbf{A}_k)$, alors il existe une suite d'applications $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de la forme ci-dessus telles que

$$\begin{aligned} \int_{V(\mathbf{A}_k)} |\chi_O - g_i| \omega_{h,\emptyset} &\rightarrow 0 \\ i &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

ce qui implique l'analogie de l'assertion (b) de la proposition 4.2.1 pour l'ouvert O . L'analogie de l'assertion (a), c'est à dire

$$\sum_{\{x \in V(k)/h(x) \leq H\}} \chi_O(x) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \chi_O \circ \pi(x) \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, HN(\mathfrak{a})^\delta}(x)$$

se démontre exactement comme dans la partie 4.

• Démontrons l'assertion (b). Elle est vérifiée par les fonctions caractéristiques des bons ouverts de $V(\mathbf{A}_k)$ et donc par toute combinaison linéaire de telles fonctions. Or les bons ouverts forment une base de la topologie de $V(\mathbf{A}_k)$ qui est

compact. On peut donc approcher f de manière uniforme par des applications de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{W_i}$ où les W_i sont de bons ouverts de $V(\mathbf{A}_k)$.

• Pour démontrer (c), on constate tout d'abord que pour toute hauteur h' , la fonction $\frac{h}{h'}$ est bien définie sur $V(\mathbf{A}_k)$. En outre

$$\frac{h}{h'} = \prod_{\nu \in S'} \frac{h_{2,\nu}}{h_{1,\nu}}$$

où S' est un ensemble fini de places. Par conséquent $\frac{h}{h'}$ est continue et partout non nulle. Si V vérifie (E_U) , alors pour toute fonction caractéristique χ_W d'un bon ouvert W de $V(\mathbf{A}_k)$, on a

$$\frac{\#\{x \in U(k)/h(x) \leq \chi_W H\}}{n_\nu(H)} \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} \frac{\int \chi_W \omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))}$$

Cette relation est également vraie pour une combinaison linéaire de telles fonctions. On approche alors $\frac{h}{h'}$ de manière uniforme en utilisant le fait que

$$\frac{\#\{x \in U(k)/H \leq h(x) \leq H(1 + \epsilon)\}}{n_\nu(H)} \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} \epsilon.$$

• Démontrons maintenant l'assertion (d). On fixe une hauteur h sur V . Nous allons démontrer l'assertion (E_U) pour h . On montre tout d'abord le résultat pour un ouvert élémentaire W de $V(\mathbf{A}_k)$, c'est à dire de la forme $W = \prod_{\nu \in M_k} W_\nu$ où, quel que soit $\nu \in M_k$, $\omega_\nu(\partial W_\nu) = 0$ et, pour presque tout $\nu \in M_k$, $W_\nu = V_\nu(k_\nu)$. On note S_W l'ensemble des places telles que $W_\nu \neq V_\nu(k_\nu)$. Soit $\epsilon \in]0, 1]$. Comme $\omega_\nu(\partial W_\nu) = 0$ pour tout $\nu \in S_W$ il existe des fonctions continues f_ν et g_ν de $V(k_\nu)$ dans \mathbf{R}_+ telles que

$$0 \leq f_\nu \leq \chi_{W_\nu} \leq g_\nu \leq 1 \text{ et } \int_{V(k_\nu)} (g_\nu - f_\nu) \omega_\nu \leq \frac{\epsilon}{4\omega_\nu(V_\nu)}.$$

On pose $\eta = \frac{\epsilon}{4}$ et

$$\hat{f}_\nu = (1 - \eta)f_\nu + \eta \text{ et } \hat{g}_\nu = (1 - \eta)g_\nu + \eta$$

si $\nu \in S_W$ et $\tilde{f}_\nu = \tilde{g}_\nu = 1$ sinon. On définit alors $f = \prod_{\nu \in M_k} \tilde{f}_\nu$ et $g = \prod_{\nu \in M_k} \tilde{g}_\nu$. Alors $\frac{h}{f}$ et $\frac{h}{g}$ sont des hauteurs sur V et, par hypothèse, on a les équivalences

$$\#\{x \in U(k)/\frac{h}{f}(x) \leq H\} \sim C_0 \int \frac{f \omega_{h,S}}{V(k)} H \log^{t-1} H$$

et

$$\#\{x \in U(k)/\frac{h}{g}(x) \leq H\} \sim C_0 \int_{V(k)} g \omega_{h,S} H \log^{t-1} H.$$

où

$$\frac{C_0}{\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L_S(s, \text{Pic } \bar{V})} \in \mathbf{Q}.$$

On obtient donc

$$\bullet \frac{\#\{x \in U(k)/h(x) \leq H f(x)\}}{\#\{x \in U(k)/h(x) \leq H\}} \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} \frac{\int_{V(k)} f d\omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))}$$

et on a une limite analogue pour g . Il existe donc H_0 tel que pour tout $H > H_0$ on ait

$$\frac{\int_{V(k)} f d\omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))} - \frac{\epsilon}{4} \leq \frac{\#\{x \in U(k)/h(x) \leq \prod_{v \in \tilde{S}_W} ((1-\eta)\chi_{w_v}(x) + \eta)H\}}{n_v(H)} \leq \frac{\int_{V(k)} g d\omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))} + \frac{\epsilon}{4}.$$

Or

$$\frac{\#\{x \in U(k)/h(x) \leq \eta H\}}{n_v(H)} \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} \eta.$$

Donc, pour H assez grand,

$$\left| \frac{\#\{x \in U(k)/h(x) \leq \chi_w(x)H\}}{n_v(H)} - \frac{\int_{V(k)} \chi_w \omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))} \right| \leq 2\frac{\epsilon}{4} + 2\frac{\epsilon}{4}.$$

On en déduit alors que pour tout $W \subset V(\mathbf{A}_k)$ appartenant à l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts élémentaires

$$\frac{\#\{x \in W \cap U(k)/h(x) \leq H\}}{n_v(H)} \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} \frac{\int_{V(k)} \chi_W \omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(V(k))}.$$

Le cas général s'obtient en construisant pour tout bon ouvert W de $\mathbf{U}(\mathbf{A}_k)$ et tout $\epsilon \in \mathbf{R}_+^*$ des éléments W' et W'' de cette algèbre tels qu'on ait les relations

$$\chi_{W'} < \chi_W < \chi_{W''} \text{ et } \omega_{h,S}(W'' - W') < \epsilon.$$

Là encore on utilise le fait que $\omega_{h,S}(\partial W) = 0$. ■

6 Compatibilité de la conjecture avec les résultats de Schanuel, Franke, Manin et Tschinkel

6.1 Le cas de l'espace projectif

Nous allons maintenant vérifier que $C_h(\mathbf{P}_k^n)$ coïncide avec la constante obtenue par Schanuel.

Proposition 6.1.1.

$$C_{\text{Sch}}(\mathbf{P}_k^n) = \frac{h_k}{\zeta_k(n+1)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} (n+1)^r \frac{R}{w} = \frac{1}{n+1} \tau_h(\mathbf{P}_k^n) = C_h(\mathbf{P}_k^n).$$

Remarque. Ce résultat découle également du corollaire 6.2.16. Toutefois nous en donnons ici une démonstration directe.

Démonstration. Grâce à la formule de Dirichlet, on peut réécrire $C_{\text{Sch}}(\mathbf{P}_k^n)$ sous la forme :

$$C_{\text{Sch}}(\mathbf{P}_k^n) = \left(\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_k(s) \right) \frac{1}{\zeta_k(n+1)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^n (n+1)^{r_1+r_2-1}.$$

Mais, par définition de la fonction ζ_k , on a la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_k(n+1)} &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{n+1}} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{N(\mathfrak{p})^k} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \frac{d_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}_k^n)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathbf{P}_k^n)}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la volume à l'infini de $\mathbf{P}_{k_\nu}^n$ correspondant à notre choix de la hauteur. Dans le cas où $k_\nu = \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \omega_\nu(\mathbf{P}_{k_\nu}^n) &= \int_{\mathbf{R}^n} \inf \left(1, \inf_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|x_i|_\nu^{n+1}} \right) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= 2^n \left(1 + n \int_1^{+\infty} \frac{x_1^{n-1}}{x_1^{n+1}} dx_1 \right) \\ &= 2^n \times (n+1) \end{aligned}$$

et, dans le cas où $k_\nu = \mathbf{C}$, en remarquant que, avec nos notations, $|\cdot|_\nu = |\cdot|^2$:

$$\omega_\nu(\mathbf{P}_{k_\nu}^n) = 2^n \int \inf \left(1, \inf_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{r_i^{2(n+1)}} \right) \right) \prod_{i=1}^n r_i dr_i d\theta_i,$$

$0 \leq \theta_i \leq 2\pi$ pour $1 \leq i \leq n$
 $0 \leq r_i$ pour $1 \leq i \leq n$

En faisant le changement de variables $u_i = r_i^2$, on obtient que

$$\begin{aligned}\omega_\nu(\mathbf{P}_{k_\nu}^n) &= (2\pi)^n \frac{1}{2^n} \omega_\nu(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n) \\ &= (2\pi)^n (n+1).\end{aligned}$$

En définitive la constante C s'écrit :

$$C = \frac{1}{n+1} \frac{\prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(\mathbf{P}_{k_\nu}^n)}{\sqrt{d}^n} \left(\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)L(s, \text{Pic } \mathbf{P}_k^n) \right) \prod_{p \in M_k} \frac{d_p(\mathbf{P}_k^n)}{L_p(1, \text{Pic } \mathbf{P}_k^n)}$$

ce qui est la constante recherchée. ■

6.2 Le cas des variétés de drapeaux généralisées

6.2.1 Notations

Nous allons maintenant comparer la constante obtenue par Franke, Manin et Tschinkel dans le cas des variétés de drapeaux généralisées (cf. [F,M,T] (2.11)) avec $C_h(P \setminus G)$.

On fixe donc un groupe linéaire semi-simple connexe G sur k et P un k -sous-groupe parabolique de G . On note $V = P \setminus G$ et $\pi : G \rightarrow V$ la projection canonique. Quitte à remplacer G par son k -revêtement universel \tilde{G} (cf. [B,T] proposition 2.24) et P par son image réciproque dans \tilde{G} , on peut se ramener au cas où G est simplement connexe. On note ${}_k P$ un k -sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P . Pour tout groupe algébrique linéaire G sur un corps L de caractéristique 0, $L(H)$ désigne l'algèbre de Lie de G , $\mathcal{R}H$ son radical, $\mathcal{R}_u H$ son radical unipotent, $X^*(H)_L$ le groupe des caractères de H sur L et $X_*(H)_L$ le groupe des cocaractères de H sur L . On note ${}_k S$ la composante scindée du tore maximal dans $\mathcal{R}_k P$. Soit ${}_k \Phi$ l'ensemble des racines de ${}_k S$ dans G , ${}_k \Delta$ la base de ${}_k \Phi$ correspondant à ${}_k P$ et ${}_k \Phi^+$ l'ensemble des racines positives. Pour tout $\alpha \in {}_k \Phi$, on note $\check{\alpha}$ la coracine correspondante.

Pour toute partie J de ${}_k \Delta$, on note $[J]$ l'ensemble des racines s'écrivant comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de J , $[J]^+$ l'intersection de $[J]$ avec ${}_k \Phi^+$, ${}_k P_J$ le k -sous-groupe parabolique standard correspondant (cf. [Borel] page 234) et ${}_k S_J$ le tore

$${}_k S_J = \left(\bigcap_{\alpha \in J} \text{Ker } \alpha \right)^\circ.$$

Le tore ${}_k S_J$ est la composante scindée du tore maximal dans $\mathcal{R}({}_k P_J)$. L'application de restriction de $X^*({}_k P_J)_k$ dans $X^*({}_k S_J)_k$ est injective et de conoyau fini. On identifiera $X^*({}_k P_J)_k$ à son image. On note également

$$\mathfrak{s}_J = X_*({}_k S_J)_k \otimes \mathbf{R}, \quad \mathfrak{s}_J^\vee = X^*({}_k S_J) \otimes \mathbf{R}$$

et \mathfrak{r}_J le radical de $L({}_k P_J)$. On désigne par $\Phi(J)^+$ l'ensemble des racines de ${}_k S_J$ dans \mathfrak{r}_J et $\rho_{{}_k P_J}$ la demi-somme de ces racines comptées avec des multiplicités égales

à la dimension de leur espace propre dans \mathfrak{r}_J . Si V_J désigne le quotient ${}_k P_J \backslash G$ et $\pi_J : G \rightarrow V_J$ la projection canonique, on a, d'après [Sa] proposition 6.10 une suite exacte

$$0 \rightarrow k[V_J]^*/k^* \rightarrow k[G]^*/k^* \rightarrow X^*({}_k P_J)_k \rightarrow \text{Pic } V_J \rightarrow \text{Pic } G.$$

Par le théorème de Rosenlicht ([Ro] theorem 3) $k[G]^*/k^*$ est isomorphe à $X^*(G)_k$ qui est trivial. En outre par [Sa] lemme 6.9 (iii), $\text{Pic } G$ est trivial puisque G est simplement connexe. On obtient donc un isomorphisme

$$X^*({}_k P_J)_k \xrightarrow{\sim} \text{Pic } V_J.$$

On vérifie aisément que cet isomorphisme est l'application qui à tout caractère χ de ${}_k P_J$ associe le faisceau \mathcal{L}_χ défini par

$$\Gamma(U, \mathcal{L}_\chi) = \{f \in \Gamma(\pi_J^{-1}(U), \mathcal{O}_G) / \forall p \in {}_k P_J, \forall g \in \pi_J^{-1}(U) f(pg) = \chi(p)f(g)\}$$

pour tout ouvert U de V_J . Cet isomorphisme envoie $2\rho_{{}_k P_J}$ sur le faisceau canonique ω_{V_J} . Par définition on a ${}_k P = {}_k P_\emptyset$. Nous noterons I la partie de ${}_k \Delta$ correspondant à \tilde{P} . On a donc la relation

$$(6.1) \quad \omega_V = \mathcal{L}_{2\rho_P}.$$

Pour toute place ν de k , on note K_ν un sous-groupe compact maximal de $G(k_\nu)$ tel que

$$G(k_\nu) = {}_k P(k_\nu)K_\nu.$$

L'existence de tels sous-groupes est une conséquence de la décomposition d'Iwasawa (cf. [Fi] 3.3.2 pour le cas d'un corps local). On suppose en outre qu'il existe un plongement $G \rightarrow GL_{n,k}$ tel que pour presque tout $\nu \in M_f$ on ait

$$K_\nu = G \cap GL_n(\mathcal{O}_{k_\nu}).$$

On pose $K = \prod_{\nu \in M_k} K_\nu$. On a alors $G(\mathbf{A}_k) = {}_k P(\mathbf{A}_k)K$. La hauteur d'un point $x \in V(k)$ relativement à un faisceau ample \mathcal{L}_χ est défini de la manière suivante (cf. [F,M,T] §2): soit $s \in \Gamma(V, \mathcal{L}_\chi)$ une section de \mathcal{L}_χ non nulle en x correspondant à une fonction $\tilde{s} \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$, soit $k \in K$ tel que, pour tout $\nu \in M_k$, $\pi(k_\nu) = x$, alors

$$h_\chi(x) = \prod_{\nu \in M_k} |\tilde{s}(k_\nu)|_\nu^{-1}.$$

L'hypothèse sur K entraîne que ce produit n'a qu'un nombre fini de termes non triviaux et la formule du produit qu'il est indépendant du choix de la section s . Dans la suite de cette section, on utilisera la hauteur

$$(6.2) \quad h = h_{-2\rho_P}$$

correspondant à ω_V^{-1} d'après (6.1).

On note ${}_k W$ le groupe de Weyl de ${}_k \Phi$. et ${}_k W_J$ le sous-groupe de ${}_k W$ engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in J$. Nous désignerons par w^J le plus long élément de

${}_k W_J$ et par w'_J un relevé de w_J dans $\mathcal{N}_G({}_k S)(k)$. Pour tout $\nu \in M_k$, on note $H_{{}_k P_J, \nu}$ la fonction de $G(k_\nu)$ dans \mathfrak{s}_J définie par

$$\forall \chi \in X^*({}_k P_J)_k, \forall p \in {}_k P_J, \forall k \in K_\nu, \exp(\langle H_{{}_k P_J, \nu}(pk), \chi \rangle) = |\chi(p)|_\nu.$$

La fonction globale correspondante est définie par

$$\forall g \in G(\mathbf{A}_k), H_{{}_k P_J}(g) = \sum_{\nu \in M_k} H_{{}_k P_J, \nu}(g_\nu).$$

On a alors la relation (cf. [F,M,T] 2.3)

$$\forall \chi \in X^*(P)_k, \forall g \in G(k), h_\chi(\pi(g)) = \exp(\langle H_P(g), \chi \rangle).$$

Pour tout groupe unipotent U sur k , on normalise la mesure de Haar sur $U(\mathbf{A}_k)$ par

$$\int_{U(k) \backslash U(\mathbf{A}_k)} du = 1.$$

Pour tout $w \in {}_k W$, représenté par $w' \in \mathcal{N}_G({}_k S)(k)$ et tout $\lambda \in \mathfrak{s}_\theta^\vee$, l'intégrale d'entrelacement $c(w, \lambda)$ est définie par

$$c(w, \lambda) = \int_{w' {}_k N(\mathbf{A}_k) w'^{-1} \backslash \bigcap_{kN(\mathbf{A}_k) \backslash {}_k N(\mathbf{A}_k)} \exp(\langle H_{{}_k P}(w'^{-1}n), \lambda + \rho_{{}_k P} \rangle) dn.$$

où ${}_k N$ désigne le radical unipotent de ${}_k P$. On note alors

$$C_{{}_k P_J} = \lim_{\lambda \rightarrow \rho_{{}_k P}} \prod_{\alpha \in J} \langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{{}_k P} \rangle c(w_J, \lambda).$$

6.2.2 Le résultat de Franke, Manin et Tschinkel

En utilisant les travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein [Lan], Franke, Manin et Tschinkel démontrent le résultat suivant (cf. [F,M,T] (2.11)) :

Théorème 6.2.1 (Franke, Manin, Tschinkel) *Avec les notation introduites dans le paragraphe 6.2.1*

$$n_V(H) \sim C_{\text{FMT}}(V) H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

avec $t = \text{rg Pic } V$ et

$$C_{\text{FMT}}(V) = \frac{C_G}{C_P(t-1)! \prod_{\alpha \in {}_k \Delta - I} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle}.$$

6.2.3 Expression de la constante en termes de la mesure de Tamagawa

L'objectif de cette section est la démonstration du résultat suivant

Théorème 6.2.2. *Si le groupe G est quasi-déployé alors*

$$C_{\text{FMT}}(V) = C_h(V).$$

Nous commençons par décrire une métrique sur ω_V^{-1} qui induit la hauteur h . Pour tout $J \subset {}_k\Delta$, pour tout $\nu \in M_k$ la métrique ν -adique $\|\cdot\|_{J,\nu}$ sur $\omega_{V_J}^{-1}$ est définie par : pour toute section s de $\omega_{V_J}^{-1}$ correspondant à une fonction \tilde{s} sur G

$$\forall k \in K_\nu, \|s(\pi_J(k))\|_{J,\nu} = |\tilde{s}(k)|_\nu.$$

Lemme 6.2.3. *Les normes $\|\cdot\|_{J,\nu}$ définissent une métrique adélique sur ω_V^{-1} dont h est la hauteur associée.*

Démonstration. Fixons un plongement du groupe G dans $GL_n(k)$ et une base (s_1, \dots, s_q) de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ correspondant à des éléments $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q$ de $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$. Par l'hypothèse que nous avons faite sur K , pour presque tout $\nu \in M_k$,

$$K_\nu = G(k_\nu) \cap GL_n(\mathcal{O}_{k_\nu}).$$

En outre, ω_V^{-1} étant très ample, pour presque tout $\nu \in M_k$, pour tout x appartenant à l'intersection de $GL_n(\mathcal{O}_{k_\nu})$ et de $G(k_\nu)$, l'idéal fractionnaire engendré par les $\tilde{s}_i(x)$ est égal à \mathcal{O}_{k_ν} . Si $\nu \in M_k$ vérifie les deux conditions ci-dessus, pour tout $p \in P(k_\nu)$, tout $k \in K_\nu$ et toute section s de ω_V^{-1} correspondant à une fonction \tilde{s} sur G , on a

$$\begin{aligned} \|s(\pi(pk))\|_\nu &= |\tilde{s}(k)|_\nu \\ &= \frac{|\tilde{s}(pk)|_\nu}{|-2\rho_p(p)|_\nu}. \end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq q} |\tilde{s}_i(pk)|_\nu &= |-2\rho_p(p)|_\nu \sup_{1 \leq i \leq q} |\tilde{s}_i(k)|_\nu \\ &= |-2\rho_p(p)|_\nu. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|s(\pi(pk))\|_\nu = \frac{|\tilde{s}(pk)|_\nu}{\sup_{1 \leq i \leq q} |\tilde{s}_i(k)|_\nu}$$

ce qui montre la première assertion. La seconde est une conséquence directe des définitions. ■

On se donne maintenant deux parties J et J' de ${}_k\Delta$ telles que $J \subset J'$. On note $\rho_{J,J'}$ la demi-somme des racines de ${}_kS_J$ dans $\tau_J \cap L(\mathcal{Z}_G({}_kS_{J'}))$. Notons $V_{J,J'}$ la variété

homogène $V_{J,J'} = {}_k P_J \backslash {}_k P_{J'}$. D'après [Sa], proposition 6.10 et le théorème de Rosenlicht, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow X^*({}_k P_{J'}) \xrightarrow{\text{Res}} X^*({}_k P_J) \rightarrow \text{Pic}(V_{J,J'}) \rightarrow \text{Pic}({}_k P_{J'}).$$

Ce dernier groupe étant fini on obtient un isomorphisme

$$(X^*({}_k P_J)/X^*({}_k P_{J'})) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q}.$$

En outre l'image de la classe de $2\rho_{J,J'}$ par cet isomorphisme est $\omega_{V_{J,J'}}$. On a une fibration d'espaces homogènes pointés

$$e \rightarrow V_{J,J'} \xrightarrow{j} V_J \xrightarrow{\pi_{J,J'}} V_{J'} \rightarrow e.$$

On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \text{Pic}(V_{J'}) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\pi_{J,J'}^*} & \text{Pic}(V_J) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{j^*} & \text{Pic}(V_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \rightarrow & X^*({}_k P_{J'}) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\text{Res}} & X^*({}_k P_J) \otimes \mathbf{Q} & \rightarrow & (X^*({}_k P_J)/X^*({}_k P_{J'})) \otimes \mathbf{Q} & \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et les colonnes des isomorphismes.

Lemme 6.2.4. *Avec les notations ci-dessus, on a la relation*

$$\rho_{{}_k P_J} - \text{Res}(\rho_{{}_k P_{J'}}) = \rho_{J,J'}$$

Démonstration. On a un isomorphisme de ${}_k S_J$ modules

$$\tau_J \cap L(\mathcal{Z}_G({}_k S_{J'})) \xrightarrow{\sim} \tau_J / \tau_{J'}$$

Par conséquent $2\rho_{J,J'}$ est le déterminant de la représentation de ${}_k P_J$ sur $\tau_J / \tau_{J'}$ induite par la représentation adjointe. Or $2\rho_{{}_k P_J}$ est le déterminant de la représentation adjointe restreinte à τ_J et $2\text{Res}(\rho_{{}_k P_{J'}})$ celui de sa restriction à $\tau_{J'}$. La formule provient donc de la suite exacte de ${}_k P_J$ -modules

$$0 \rightarrow \tau_{J'} \rightarrow \tau_J \rightarrow \tau_J / \tau_{J'} \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Comme ci-dessus nous définissons une métrique adélique $\|\cdot\|_{J,J'}$ sur $\omega_{V_{J,J'}}^{-1}$, par : pour toute place ν de k , pour toute section s de $\omega_{V_{J,J'}}^{-1}$, correspondant à une fonction \tilde{s} sur ${}_k P_{J'}$,

$$\forall k \in K_\nu \cap {}_k P_{J'}(k_\nu), \|s({}_k P_J k)\|_{J,J',\nu} = |\tilde{s}(k)|_\nu.$$

On note ω_J , $\omega_{J'}$ et $\omega_{J,J'}$ les mesures de Tamagawa définies respectivement sur V_J , $V_{J'}$ et $V_{J,J'}$ par les normes adéliques $\|\cdot\|_J$, $\|\cdot\|_{J'}$ et $\|\cdot\|_{J,J'}$. On note h_J , $h_{J'}$ et $h_{J,J'}$ les hauteurs induites. Pour tout $x \in V_J(\mathbf{A}_k)$ se relevant en un élément $k \in K$, on

note $\omega_{J,J'}^x$ la mesure sur $V_{J,J'}(\mathbf{A}_k)k$, vu comme sous-espace de $V_J(\mathbf{A}_k)$, telle que, pour tout ouvert U de $V_{J,J'}(\mathbf{A}_k)k$, on ait

$$\omega_{J,J'}^x(U) = \omega_{J,J'}(Uk^{-1})$$

Cela ne dépend pas du relèvement choisi. En effet la norme $\|\cdot\|_{J,J'}$ est invariante sous l'action à droite de $K_\nu \cap {}_kP_{J'}(k_\nu)$. La mesure $\omega_{J,J'}$ est donc également invariante sous cette action. La mesure ω'_J sur $V_J(\mathbf{A}_k)$ est alors donnée par la relation

$$\omega'_J(U) = \int_{V_{J'}(\mathbf{A}_k)} \omega_{J'} \int_{V_J(\mathbf{A}_k)x} \chi_U \omega_{J,J'}^x$$

pour tout ouvert U de $V_J(\mathbf{A}_k)$.

Lemme 6.2.5. *Les mesures ω_J et ω'_J coïncident. En particulier*

$$\tau_{h_{J'}}(V_{J'}) = \tau_{h_J}(V_J) / \tau_{h_{J,J'}}(V_{J,J'}).$$

Démonstration. La suite exacte de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules

$$0 \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}_{J'}) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}_J) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow 0$$

donne pour tout $\nu \in M_f - S$ la relation

$$L_\nu(1, \text{Pic}(\bar{V}_J)) = L_\nu(1, \text{Pic}(\bar{V}_{J'})) L_\nu(1, \text{Pic}(\bar{V}_{J,J'})).$$

Il suffit donc de montrer que les mesures locales coïncident. On fixe donc une place ν de k . Pour tout $\alpha \in {}_k\Phi$, on pose

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} / \forall t \in {}_kS(k), \text{Ad } t(X) = \alpha(t)X\}$$

où \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de G ; (α) est l'ensemble des multiples positifs de α et $\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \in (\alpha)} \mathfrak{g}_\beta$. L'unique k -sous-groupe connexe unipotent de G normalisé par $\mathcal{Z}_G({}_kS)$ et ayant $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$ pour algèbre de Lie est noté ${}_kU_{(\alpha)}$ (cf. [Borel] proposition 21.9). Nous noterons U_J^- (resp. $U_{J'}^-, U_{J,J'}^-$) le sous-groupe engendré par les ${}_kU_{(\alpha)}$ pour α appartenant à ${}_k\Phi^- - [J]$ (resp. ${}_k\Phi^- - [J']$, ${}_k\Phi^- \cap ([J'] - [J])$) où ${}_k\Phi^-$ désigne l'ensemble des racines négatives. Le groupe $U_J^- \mathcal{Z}_G({}_kS_J)$ est le k -sous-groupe parabolique opposé à ${}_kP_J$ et U_J^- est le radical unipotent de ce groupe. D'après [Borel], proposition 14.21 (iii), la projection π_J induit donc un isomorphisme de U_J^- sur un ouvert de Zariski W de V_J . Il suffit de montrer le résultat sur cet ouvert. L'application produit

$$U_{J,J'}^- \times U_{J'}^- \rightarrow U_J^-$$

est un isomorphisme. En outre, $U_{J'}^-$ et $U_{J,J'}^-$ sont isomorphes à des espaces affines en tant que variétés sur k . Soient $u_{1,1}, \dots, u_{1,k}$ des coordonnées pour $U_{J,J'}^-$ et

$u_{2,1}, \dots, u_{2,n-k}$ des coordonnées pour $U_{J'}^-$. Les coordonnées $(u_{1,1}, \dots, u_{2,n-k})$ induisent des coordonnées locales sur $V_J(k_\nu)$. On notera u le morphisme correspondant de W dans \mathbf{A}_k^n . La section

$${}^t\omega(u)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{2,n-k}} \right)$$

de $\omega_{V_J}^{-1}$ correspond à la fonction f sur $\pi^{-1}(W)$ caractérisée par les relations

$$\begin{cases} \forall p \in {}_kP_J(k_\nu), \forall g \in G(k_\nu), & f(pg) = (-2\rho_{{}_kP_J})(p)f(g) \\ \forall g \in U_{J'}^-(k_\nu), & f(g) = 1. \end{cases}$$

Si $g \in U_{J'}^-(k_\nu)$ s'écrit $g = pk$ avec $p \in {}_kP(k_\nu)$ et $k \in K_\nu$ alors

$$\begin{aligned} \|\omega(u)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{2,n-k}} \right) (\pi_J(g))\|_\nu &= |f(k)|_\nu \\ &= |-2\rho_{{}_kP_J}(p)|_\nu^{-1} \\ &= \exp(\langle H_{{}_kP_J}(g), 2\rho_{{}_kP_J} \rangle). \end{aligned}$$

La mesure $\omega_{J,\nu}$ est donc donnée par

$$(6.3) \quad \omega_{J,\nu} = \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u), 2\rho_{{}_kP_J} \rangle) du.$$

De même, sur l'image de $U_{J'}^-(k_\nu)$ dans $V_{J'}(k_\nu)$, la mesure $\omega_{J',\nu}$ s'écrit

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \omega_{J',\nu} &= \exp(\langle H_{{}_kP_{J'}}(u_2), 2\rho_{{}_kP_{J'}} \rangle) du_2 \\ &= \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_2), 2\text{Res } \rho_{{}_kP_{J'}} \rangle) du_2 \end{aligned}$$

et sur l'image de $U_{J,J'}^-(k_\nu)$ dans $V_{J,J'}(k_\nu)$ on a

$$(6.5) \quad \omega_{J,J',\nu} = \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{J,J'} \rangle) du_1.$$

Soit $u_2 \in U_{J'}^-$. Nous allons maintenant décrire la mesure $\omega_{J,J'}^{\pi_{J,J'}(u_2)}$. Soit U un ouvert de $U_{J,J'}^- u_2$. Soit $u_2 = p_2 k_2$ une décomposition de u_2 avec $p_2 \in {}_kP_J(k_\nu)$ et $k_2 \in K_\nu$. Par définition on a

$$\begin{aligned} \omega_{J,J'}^{\pi_{J,J'}(u_2)}(U) &= \omega_{J,J'}(U k_2^{-1}) \\ &= \omega_{J,J'}((U u_2^{-1}) p_2) \end{aligned}$$

Il nous faut donc déterminer comment l'action à droite de ${}_kP_J$ sur $V_{J,J'}$ agit sur $\omega_{J,J'}$. Soit x un élément de ${}_kP_{J'}$ de décomposition $x = pk$, soit s une section de $\omega_{V_{J,J'}}^{-1}$ correspondant à une fonction \tilde{s} sur G . Soit \tilde{s}' la fonction définie par

$$\forall g \in G(k_\nu), \tilde{s}'(g) = \tilde{s}(gp_2^{-1}).$$

Soit s' la section correspondante. Soit $p'k'$ une décomposition de $x p_2$ avec des éléments p' de ${}_kP_J(k_\nu)$ et k' de H_ν . On obtient

$$\begin{aligned} \|s(\pi_J(x)) \cdot p_2\|_\nu &= \|s'(\pi_J(x p_2))\|_\nu \\ &= |\tilde{s}'(k')|_\nu \\ &= |\tilde{s}(k' p_2^{-1})|_\nu \\ &= |(-2\rho_{J,J'})(p'^{-1} p)|_\nu \|s(\pi_J(x))\|_\nu \\ &= \exp(\langle H_{{}_kP_J}(x p_2) - H_{{}_kP_J}(x), 2\rho_{J,J'} \rangle) \|s(\pi_J(x))\|_\nu. \end{aligned}$$

En appliquant (6.5), on obtient

$$\begin{aligned} & \omega_{J,J'}^{\pi'_J(u_2)}(U) \\ &= \int_{Uu_2^{-1}} \exp(\langle H_{kP_J}(u_1), 2\rho_{J,J'} \rangle) \exp(\langle H_{kP_J}(u_1p_2) - H_{kP_J}(u_1), 2\rho_{J,J'} \rangle) du_1 \\ &= \int_{Uu_2^{-1}} \exp(\langle H_{kP_J}(u_1u_2), 2\rho_{J,J'} \rangle) du_1. \end{aligned}$$

La mesure ω'_J s'écrit donc

$$\omega'_J = \exp(\langle H_{kP_J}(u), 2\text{Res } \rho_{kP_{J'}} + 2\rho_{J,J'} \rangle) du.$$

Le lemme découle de (6.3) et du lemme 6.2.4. ■

Notre objectif est maintenant de comparer C_G à $\tau_{h_\emptyset}(V_\emptyset)$ et C_P à $\tau_{h_{J,J'}}(V_{\emptyset,I})$. Pour toutes parties J, J' de ${}_k\Delta$, nous noterons

$$\lambda_\nu(J, J') = \begin{cases} L_\nu(1, \text{Pic}(\overline{V}_{J,J'})) & \text{si } \nu \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On posera également $\lambda_\nu(J) = \lambda_\nu(J, {}_k\Delta)$. Si U est un groupe unipotent sur k_ν , les mesures de Haar sur $U(k_\nu)$ sont normalisées de sorte que

$$\int_{U(\mathcal{O}_{k_\nu})} du_\nu = 1$$

si $\nu \in M_f$ et

$$\int \prod_{\nu \in M_\infty} \frac{U(k_\nu)}{U(k)} du_\nu = 1.$$

On note

$$Q_J = {}_kN \cap w'_J{}^{-1} {}_kN w'_J \backslash w'_J{}^{-1} {}_kN.$$

Lemme 6.2.6. *La projection π_\emptyset induit un isomorphisme de Q_\emptyset sur un ouvert de Zariski W_\emptyset de V_\emptyset . Cet isomorphisme transforme la mesure $\omega_{h_\emptyset, S}$ en la mesure*

$$\prod_{\nu \in M_k} \lambda_\nu(\emptyset) \exp(\langle H_{kP_\emptyset, \nu}(n), 2\rho_{kP_\emptyset} \rangle) dn_\nu.$$

Elle induit également un isomorphisme de Q_I sur un ouvert de Zariski W_I de $V_{\emptyset, I}$. Cet isomorphisme transforme la mesure $\omega_{h_{\emptyset, I}, S}$ en la mesure

$$\prod_{\nu \in M_k} \lambda_\nu(\emptyset, I) \exp(\langle H_{kP_\emptyset, \nu}(n), 2\rho_{kP_\emptyset} \rangle) dn_\nu.$$

Démonstration. D'après la démonstration du lemme 6.2.5 π_\emptyset induit un isomorphisme de U_\emptyset^- sur un ouvert de V_\emptyset . Mais U_\emptyset^- est isomorphe à

$${}_k N \cap w'_\emptyset^{-1} {}_k N w'_\emptyset \setminus w'_\emptyset^{-1} {}_k N$$

ce qui démontre la première assertion du lemme. En outre cela montre que Q_\emptyset est isomorphe à un espace affine \mathbf{A}_k^n . On note u l'isomorphisme induit de W_\emptyset dans \mathbf{A}_k^n . Comme dans le lemme précédent, on montre que pour tout $g \in w'_\emptyset {}_k N(k_\nu)$

$$\| {}^t \omega(u)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u_n} \right) (\pi_\emptyset(g)) \|_\nu = \exp(\langle H_{kP_\emptyset, \nu}(g), 2\rho_{kP_\emptyset} \rangle)$$

Par ailleurs la mesure induite par l'isomorphisme de $Q_\emptyset(k_\nu)$ sur $\mathbf{A}_k^n(k_\nu)$ transporte la mesure de $\mathbf{A}_k^n(k_\nu)$ en dn_ν si ν est une place finie de k et le produit des places à l'infini en $\sqrt{d_k}^{\dim V} \prod_{\nu \in M_\infty} dn_\nu$. Ceci démontre la seconde assertion. Les deux dernières se démontrent de manière similaire en utilisant le fait que les fonctions

$$\exp(\langle H_{kP_J}(g), 2\rho_{kP_\emptyset} \rangle) \text{ et } \exp(\langle H_{kP_J}(g), 2\rho_{\emptyset, I} \rangle)$$

coïncident sur l'ensemble $w'_I {}_k N(\mathbf{A}_k)$. ■

L'intégrale divergente $\int_{Q_\emptyset} \exp(\langle H_{kP_\emptyset}(n), 2\rho_{kP_\emptyset} \rangle) dn$ et l'intégrale similaire pour Q_I peuvent donc être régularisée de deux manières différentes, soit en utilisant les facteurs de convergence $\lambda_\nu(\emptyset)$ (resp. $\lambda_\nu(\emptyset, I)$), soit en utilisant les fonctions $s \rightarrow c(w, s\rho_{kP})$. Il nous faut comparer les valeurs obtenues par ces deux méthodes. Pour cela il nous faut étudier de manière plus précise les termes locaux intervenant dans $c(w, \lambda)$, ce qui nous amène à considérer les intégrales d'entrelacement locales.

Dans ce but nous commençons par rappeler quelques notations de la théorie des immeubles. On suppose désormais que le groupe G est quasi-déployé. Pour souligner cet hypothèse on notera B le k -sous-groupe de Borel ${}_k P$. Soit T le normalisateur de ${}_k S$. C'est un tore maximal de G . Pour toute place finie \mathfrak{p} de k , on note ${}_k P$ la composante scindée de $T_{k_\mathfrak{p}}$, ${}_k \Phi$ l'ensemble des racines de ${}_k P$ dans $G_{k_\mathfrak{p}}$ et ${}_k W$ le groupe de Witt associé. L'appartement associé au triplet $(G, {}_k P, {}_k P)$ sera noté $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$. Le groupe de Weyl du système de racines affines est noté ${}_k W_{\text{aff}}$. D'après [Ti] 3.9.1, pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$ le groupe $K_\mathfrak{p}$ est le stabilisateur d'un point $x_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$. Soit ${}_k \Phi_0$ le système de racines réduit dont ${}_k W_{\text{aff}}$ est le groupe de Weyl affine. Le choix de $x_\mathfrak{p}$ permet d'identifier $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ à l'espace vectoriel associé qui est donné par

$$V_\mathfrak{p} = \text{Hom}(X^*(\mathcal{Z}_G({}_k P))_{k_\mathfrak{p}}, \mathbf{R}) = \text{Hom}(X^*(T)_{k_\mathfrak{p}}, \mathbf{R}).$$

Comme $X^*(T)_{k_\mathfrak{p}}$ est égal à $X^*({}_k P)$, on a un plongement de $X^*({}_k P)$ dans le dual de $V_\mathfrak{p}$. On identifie ${}_k \Phi$ avec son image par ce plongement. Toute racine de ${}_k \Phi$ est proportionnelle à une unique racine de ${}_k \Phi_0$. Pour toute racine affine α , on note ${}_k N$ le radical unipotent de ${}_k P$ et

$$N(\alpha) = \{n \in {}_k N(k_\mathfrak{p}) / \forall x \in \mathcal{A}_\mathfrak{p}, \alpha(x) \geq 0 \Rightarrow nx = x\}.$$

On définit $q_\alpha = [N(\alpha - 1) : N(\alpha)]$. Comme dans [Mac] ou [Cas], on définit ${}_k\Phi_1$ comme la réunion de ${}_k\Phi_0$ et de

$$\left\{ \frac{\alpha}{2}, \alpha \in {}_k\Phi_0 / q_\alpha \neq q_{\alpha+1} \right\}.$$

Nous noterons ${}_k\tilde{\Phi}$ le système obtenu à partir de ${}_k\Phi$ en retirant les racines telles que 2α appartient à ${}_k\Phi$.

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on note ρ_{B_k} la demi-somme des racines positives comptées avec multiplicités et

$$\begin{aligned} \chi_{\mathfrak{p}} : T(k_{\mathfrak{p}}) &\rightarrow \mathbf{C}^* \\ m &\mapsto |2\rho_{B_k}(m)|_{\mathfrak{p}}^{1/2}. \end{aligned}$$

Soit ${}_k\Delta$ la base de ${}_k\Phi$ correspondant à B_k . Soit ${}_kI \subset {}_k\Delta$ la partie de ${}_k\Delta$ correspondant à P_k . Comme précédemment, si $J \subset {}_k\Delta$, on note ${}_kW_J$ le sous-groupe de ${}_kW$ engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in J$ et w_J le plus long élément de ${}_kW_J$. Pour tout caractère régulier $\chi \in \text{Hom}(T(k_{\mathfrak{p}}), \mathbf{C}^*)$ et tout $w \in {}_kW$, $c_{\mathfrak{p}}(w, \chi)$ est l'intégrale d'entrelacement locale (cf. [Cas] theorem 3.11).

Lemme 6.2.7. *Si le groupe G est quasi-déployé, pour presque toute place finie \mathfrak{p} de k , le terme local de $c(w_{k\Delta}, s\rho_B)$ à savoir l'intégrale*

$$\int_{w'_{k\Delta} kN(k_{\mathfrak{p}}) w'_{k\Delta}{}^{-1} \cap kN(k_{\mathfrak{p}}) \backslash kN(k_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{B,\mathfrak{p}}(w'_{k\Delta}{}^{-1}n), (s+1)\rho_B \rangle) dn_{\mathfrak{p}}$$

est égale à

$$c_{\mathfrak{p}}(w_{k\Delta}, \chi_{\mathfrak{p}}^s).$$

Un résultat analogue vaut pour $c(w_I, s\rho_B)$.

Démonstration. D'après [Cas] theorem 3.1 et [Car] 3.7 (32), pour tout caractère $\chi \in X^*(k, S)$ tel que $|\cdot|_{\mathfrak{p}} \circ \chi$ est régulier, on a

$$c_{\mathfrak{p}}(w, |\cdot|_{\mathfrak{p}} \circ \chi) = \int_{w'_{k\Delta} kN(k_{\mathfrak{p}}) w'_{k\Delta}{}^{-1} \cap {}_kN(k_{\mathfrak{p}}) \backslash {}_kN(k_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{B,\mathfrak{p}}(w'^{-1}n), \chi + \rho_B \rangle) dn_{\mathfrak{p}}.$$

où w' est un relevé de w dans $\mathcal{N}_G(k, S)(k_{\mathfrak{p}}) \cap K_{\mathfrak{p}}$. La formule résulte alors du fait que $w'_{k\Delta}$ représente $w_{k\Delta}$ puisque G est quasi-déployé et appartient à $K_{\mathfrak{p}}$ pour presque toute place finie de k . La démonstration de la seconde assertion est analogue. ■

Lemme 6.2.8. *Pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$, les systèmes de racines ${}_k\tilde{\Phi}$ et ${}_k\Phi_0$ coïncident. Si α est une racine de ${}_k\tilde{\Phi}$ telle que $1/2\alpha \notin {}_k\Phi$ et telle que l'espace propre correspondant \mathfrak{g}_{α} est de dimension un, alors $1/2\alpha \notin {}_k\Phi_1$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} \in M_f$ une place telle que $K_{\mathfrak{p}}$ soit le stabilisateur d'un point hyperspécial de $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ et telle que $G_{k_{\mathfrak{p}}}$ se déploie sur une extension non ramifiée. Nous allons tout d'abord montrer la première assertion. Pour cela il suffit de démontrer que les groupes de Weyl affines correspondants sont identiques. Par définition, le groupe de Weyl affine de ${}_k\Phi_0$ est ${}_k W_{\text{aff}}$. Soit

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}} : T(k_{\mathfrak{p}}) &\rightarrow V_{\mathfrak{p}} \\ m &\mapsto (\chi \mapsto \nu_{\mathfrak{p}}(\chi(m))). \end{aligned}$$

le noyau de $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ est noté $T_{k_{\mathfrak{p}}}^0$. Le groupe G étant semi-simple et simplement connexe

$${}_k W_{\text{aff}} = \mathcal{N}_{G({}_k S)}(k_{\mathfrak{p}})/T_{k_{\mathfrak{p}}}^0$$

(cf. [Ti] 1.13). Par [Ti] 1.3

$$\text{Im } \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}} = \text{Hom}(X^*({}_k S)_{k_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Z})$$

puisque G se déploie sur une extension non ramifiée. Comme G est simplement connexe $X^*({}_k S)_{k_{\mathfrak{p}}}$ est le réseau des poids $P({}_k\Phi)$ de ${}_k\Phi$. Son dual est donc le réseau engendré par ${}_k\tilde{\Phi}^{\vee}$, noté $Q({}_k\tilde{\Phi}^{\vee})$. On obtient donc que ${}_k W_{\text{aff}}$ est le produit semi-direct

$$Q({}_k\tilde{\Phi}^{\vee}) \rtimes ({}_k W_{\text{aff}})_{x_{\mathfrak{p}}}.$$

Mais comme $x_{\mathfrak{p}}$ est spécial, $({}_k W_{\text{aff}})_{x_{\mathfrak{p}}}$ coïncide avec le groupe de Weyl de ${}_k\Phi$. Par [Bki] VI.2.1, proposition 1, le groupe ${}_k W_{\text{aff}}$ est le groupe de Weyl affine de ${}_k\tilde{\Phi}$.

Soient \mathfrak{p} et α vérifiant les hypothèses de la seconde assertion du lemme. Alors $U_{\alpha}(k_{\mathfrak{p}})$ est isomorphe en tant que groupe à $\mathbf{G}_{\alpha}(k_{\mathfrak{p}})$ et $q_{\alpha} = q_{\alpha+1} = N(\mathfrak{p})$. ■

Soit k' une extension de Galois de k déployant le groupe G . Soit ${}_{k'}\Delta$ la base du système de racines ${}_{k'}\Phi$ de $T_{k'}$ dans $G_{k'}$ correspondant à $B_{k'}$. Soit ${}_{k'}I$ la partie de ${}_{k'}\Delta$ correspondant à $P_{k'}$. La base du réseau des poids est notée $(\varpi_{\alpha})_{\alpha \in {}_{k'}\Phi}$.

Lemme 6.2.9. *Si G est quasi-déployé et J est une partie de ${}_k\Delta$, alors une base de $\text{Pic } V_J \times k'$ est donnée par les éléments ϖ_{α} pour $\alpha \in {}_{k'}\Phi - J$. L'action du groupe de Galois $\text{Gal}(k'/k)$ sur $\text{Pic } V_J \times k'$ est celle induite par l'action naturelle sur cette base et le cône des classes de diviseur effectifs est le cône $\sum_{\alpha \in {}_{k'}\Phi - J} \mathbf{R}^+(-\varpi_{\alpha})$.*

Démonstration. Comme G est simplement connexe, $X^*(T_{k'})$ est le réseau des poids. Il en est donc de même de $X^*(B_{k'})$ ce qui montre les deux premières assertions du lemme pour V_{\emptyset} . Par la décomposition de Bruhat, G est la réunion disjointe des $C(w) = BwB$ pour $w \in {}_{k'}W$. On a également des isomorphismes (cf. [Borel] theorem 14.12)

$$(6.6) \quad \begin{aligned} B \times U'_w &\xrightarrow{\sim} BwB \\ (b, u) &\mapsto bwu \end{aligned}$$

où U'_w est le sous-groupe de G_k engendré par les sous-groupes U_γ pour

$$\gamma \in \{\delta \in {}_k\Phi / \delta > 0 \text{ et } w\delta < 0\}.$$

Si $J \subset {}_k\Delta$, ${}_k W^J$ désigne l'ensemble des uniques éléments de longueur minimale dans les classes $W_J w \subset {}_k W$. D'après [Borel], theorem 21.29, les $\pi_J(C(w))$ pour $w \in {}_k W^J$ forment une décomposition cellulaire de $V_J \times k'$ et l'isomorphisme (6.6) fournit un isomorphisme

$$U'_w \xrightarrow{\sim} \pi_J(C(w))$$

pour tout $w \in {}_k W^J$. On obtient donc que

$$\begin{aligned} \dim(\pi_J(C(w))) &= \dim(U'_w) \\ &= \#\{\gamma \in {}_k\Phi / \delta > 0 \text{ et } w\delta < 0\} \\ &= l(w) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est donnée par [Bki] VI 1.1.6 corollaire 2. Par [Fu], exemple 1.9.1 on en déduit que le groupe de Chow $\text{CH}_i(V_J)$ est engendré par les classes $[\pi_J(C(w))]$ pour $w \in {}_k W^J$ avec $l(w) = i$. En particulier $\text{CH}_1(V_\emptyset \times k')$ est engendré par les éléments $[\pi_\emptyset(C(s_\alpha))]$ pour $\alpha \in {}_k\Delta$ et $\text{Pic}(V_\emptyset \times k')$ par les éléments $[\pi_\emptyset(C(s_\alpha w_{k',\Delta}))]$. La fonction définie par

$$\forall b \in B(k'), \forall u \in U(k'), f(bw'_{k',\Delta} u) = \varpi_\alpha(b)^{-1}$$

s'étend en une fonction sur G et induit une section du faisceau inversible associé. Elle s'annule sur $Bs_\alpha w_{k',\Delta} B$. On en déduit que la base du lemme correspond au système générateur ci-dessus. En particulier les images des poids fondamentaux sont les opposés de classes de diviseurs effectifs. Par ailleurs, pour tout $\alpha \in {}_k\Delta$, $\pi_\emptyset(C(s_\alpha))$ est isomorphe à \mathbf{P}^1 et si $\chi \in X^*(B)_k$, alors \mathcal{L}_χ induit le faisceau $\mathcal{O}(\langle \tilde{\alpha}, \chi \rangle)$ sur $\pi_\emptyset(C(s_\alpha))$ ce qui montre l'inclusion inverse. Soit ${}_k W^J(1)$ le sous-ensemble des éléments de longueur $\dim(V_J) - 1$ dans ${}_k W^J$. D'après [Bki], IV §1 exercice 3, pour tout $w \in {}_k W^J(1)$,

$$\begin{aligned} l(w_J w) &= l(w_J) + l(w) \\ &= \dim(V_{\emptyset,J}) + \dim(V_J) - 1 \\ &= \dim(V_\emptyset) - 1 \end{aligned}$$

et d'après [Borel] 14.21

$$\pi_{\emptyset,J}(\pi_\emptyset(C(w_J w))) = \pi_{\emptyset,J}(\pi_\emptyset(C(w))).$$

Par conséquent une base de $\text{Pic}(V_J \times k')$ est donnée par les éléments ϖ_α pour $\alpha \in {}_k\Delta - J$. Les autres assertions pour V_J résultent de leurs analogues pour V_\emptyset . ■

Lemme 6.2.10. *Si G est quasi-déployé, le produit*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}_\emptyset) c_{\mathfrak{p}}(w_{k',\Delta}, \chi_{\mathfrak{p}}^s)$$

converge absolument au voisinage de 1. Un résultat analogue vaut pour $\overline{V}_{\emptyset,I}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} \in M_f - S$. Pour tout $\alpha \in {}_k\Phi_0$, a_α désigne un élément de T_k , tel que $\tilde{\nu}_\mathfrak{p}$ est la coracine $\check{\alpha}$. D'après [Car] theorem 3.9,

$$c_\mathfrak{p}(w, \chi) = \prod_{\substack{\alpha \in {}_k\Phi_0 \\ \alpha > 0 \text{ et } w\alpha < 0}} c_\mathfrak{p}(\alpha, \chi)$$

avec

$$c_\mathfrak{p}(\alpha) = \frac{(1 - q_{\frac{\alpha}{2}}^{-1/2} q_\alpha^{-1} \chi(a_\alpha))(1 + q_{\frac{\alpha}{2}}^{-1/2} \chi(a_\alpha))}{1 - \chi(a_\alpha)^2}$$

où $q_{\frac{\alpha}{2}} = q_{\alpha+1}/q_\alpha$ et vaut 1 si $\frac{\alpha}{2} \notin {}_k\Phi_1$. Pour presque tout $\mathfrak{p} \in M_f$ le point $x_\mathfrak{p}$ correspondant à $K_\mathfrak{p}$ est hyperspécial et, par le lemme 6.2.8, ${}_k\Phi_0 = {}_k\tilde{\Phi}$. Si \mathfrak{p} vérifie ces deux conditions, alors

$$\forall \alpha \in {}_k\Phi_0, \chi_\mathfrak{p}^s(a_\alpha) = N(\mathfrak{p})^{-s \langle \check{\alpha}, \rho_{B_k} \rangle}$$

et $q_{\frac{\alpha}{2}} \geq 1$. En outre

$$\{\alpha \in {}_k\Phi / \alpha > 0 \text{ et } w_{k, \Delta} \alpha < 0\} = {}_k\Phi^+.$$

Il suffit donc de montrer que le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} \frac{L_\mathfrak{p}(s, \text{Pic } \overline{V}_\theta)}{\prod_{\alpha \in \{{}_k\Delta / \dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1\}} (1 - N(\mathfrak{p})^s)}$$

converge au voisinage de 1. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S$ tel que k' soit contenu dans une extension non ramifiée maximale k_p^{nr} de $k_\mathfrak{p}$ le groupe de Galois $\text{Gal}(k_p^{\text{nr}}/k_\mathfrak{p})$ qui est isomorphe à $\hat{\mathbf{Z}}$ conserve la base de $\text{Pic } V_\theta \times k'$ et l'orbite d'un élément de ${}_k\Delta$ est réduite à cet élément si et seulement si $\dim \mathfrak{g}_{(j(\alpha))} = 1$ où $j : {}_k\Delta \rightarrow {}_k\Delta$ est l'application naturelle. La première assertion du lemme s'en déduit. La seconde se démontre de même. ■

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les deux méthodes de régularisation donnent le même résultat ce qui fournit le lemme suivant :

Lemme 6.2.11. *Si le groupe G est quasi-déployé, on a les égalités*

$$C_G = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V_\theta} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_\theta) \omega_\theta(V_\theta(\mathbf{A}_k))$$

et

$$C_P = \prod_{\alpha \in I} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V_{\theta, I}} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_{\theta, I}) \omega_{\theta, I}(V_{\theta, I}(\mathbf{A}_k)).$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
C_G &= \lim_{\lambda \rightarrow \rho_B} \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_B \rangle c(w_{k\Delta}, \lambda) \\
&= \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V_\emptyset} \int_{Q_\emptyset(\mathbf{A}_k)} \exp(\langle H_B(n), \rho_B \rangle)^{s+1} dn \\
&= \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} \left[(s-1)^{\text{rg Pic } V_\emptyset} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_\emptyset) \right. \\
&\quad \left. \int_{Q_\emptyset(\mathbf{A}_k)} \left(\prod_{\nu \in M_k} \lambda_\nu(s)^{-1} \right) \exp(\langle H_B(n), \rho_B \rangle)^{s+1} dn \right]
\end{aligned}$$

où

$$\lambda_\nu(s) = \begin{cases} L_\nu(s, \text{Pic } \overline{V}_\emptyset) & \text{si } \nu \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce aux lemmes 6.2.7 and 6.2.10, on obtient

$$\begin{aligned}
C_G &= \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} \left((s-1)^{\text{rg Pic } V_\emptyset} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_\emptyset) \right) \\
&\quad \int_{Q_\emptyset(\mathbf{A}_k)} \left(\prod_{\nu \in M_k} \lambda_\nu(1)^{-1} \right) \exp(\langle H_B(n), \rho_B \rangle)^2 dn.
\end{aligned}$$

La première assertion s'en déduit à l'aide du lemme 6.2.6. On démontre de façon semblable la seconde assertion. ■

Lemme 6.2.12. *Si G est quasi-déployé alors*

$$\alpha_c(V) = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \frac{\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle}{(t-1)! \prod_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle}.$$

Démonstration. Par le lemme 6.2.9, le groupe $\text{Pic}(\overline{V}_J)^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}$ a pour base $\left(\sum_{j(\beta)=\alpha} \varpi_\beta \right)_{\alpha \in {}_k\Delta - J}$. Or on a des isomorphismes

$$\text{Pic}(V_J) \xrightarrow{\sim} X^*(P_J) \xrightarrow{\sim} X^*(P_J)_{\overline{k}}^{\text{Gal}(\overline{k}/k)} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\overline{V}_J)^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

Donc les éléments ci-dessus forment également une base de $\text{Pic } V_J$. Sur la base obtenue pour $\text{Pic } V_\emptyset$, ρ_B s'écrit comme $\sum_{\beta \in {}_k\Delta} \varpi_\beta$. Une base de $\text{Pic}(V_I)^\vee$ est donc donnée par les éléments $\frac{\check{\alpha}}{\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle}$. Or le cône des classes de diviseurs effectifs est donné par

$$C_{\text{eff}}(V_I) = \sum_{\alpha \in {}_k\Delta - J} \mathbf{R}^+ \sum_{j(\beta)=\alpha} -\varpi_\beta$$

Le domaine $C_{\text{eff}}^{\vee}(V_I) \cap \mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1)$ a donc pour équations

$$\begin{cases} x_\alpha < 0 \text{ pour } \alpha \in {}_k\Delta - I \\ \sum_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \frac{\langle \check{\alpha}, -2\rho_P \rangle}{\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle} x_\alpha = 1 \end{cases}$$

ce qui donne la formule du lemme. ■

Démonstration du théorème 6.2.2. D'après le lemme 6.2.11, on a

$$\frac{C_G}{C_P} = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \tau_h(V(\mathbf{A}_k)).$$

Donc le lemme 6.2.12 montre que

$$C_{\text{FMT}} = \alpha_c(V) \tau_h(V(\mathbf{A}_k)). \quad \blacksquare$$

6.2.4 Vérification de la conjecture raffinée

Proposition 6.2.13. *Si G est quasi-déployé, pour tout bon ouvert W de $V(\mathbf{A}_k)$*

$$\begin{aligned} \frac{n_{h,W}(H)}{n_V(H)} &\rightarrow \frac{\omega_{h,S}(W)}{\omega_{h,S}(V(\mathbf{A}_k))} \\ H &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit S' un sous-ensemble fini de M_k et pour tout $\nu \in S'$, soit ϕ_ν une application continue et K_ν -finie sur le quotient $K_\nu \cap P(k_\nu) \backslash K_\nu$ (i.e telle que l'espace vectoriel engendré par l'orbite de ϕ_ν sous l'action de K_ν soit de dimension finie.) On étend ϕ_ν à $G(k_\nu)$ à l'aide de la décomposition d'Iwasawa et on note $\phi = \prod_{\nu \in S'} \phi_\nu$. La remarque 10.b dans [F,M,T] qui est une conséquence des travaux de Langlands (cf. notamment [Lan] appendice II) et la démonstration de la proposition 6.2.2 impliquent que

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\{x \in V(k)/h(x) \leq H\}} \phi(x)}{n_V(H)} = \frac{\int \phi \omega_{h,S}}{\omega_{h,S}(\overline{V(k)})}.$$

Or toute fonction continue f_ν sur $V(k_\nu)$ est limite uniforme de telles fonctions ϕ_ν . Par conséquent, on a une limite analogue si on remplace ϕ par une fonction f de la forme $\prod_{\nu \in S'} f_\nu$ où f_ν est une fonction continue sur $V(k_\nu)$. La fin de la démonstration de l'assertion (b) est la même que celle de l'assertion (d) de la proposition 5.1. ■

Ceci donne en particulier une nouvelle démonstration de l'approximation faible pour ces variétés (cf. [Boro]).

Corollaire 6.2.14. *Si G est quasi-déployé, V vérifie l'approximation faible.*

Démonstration. Pour tout $\nu \in M_k$, $V(k_\nu)$ est lisse et pour tout $P \in V(\mathbf{A}_k)$, P possède une base de voisinage constituée de bons ouverts de volume non nul pour $\omega_{h,S}$. ■

Corollaire 6.2.15. *Si G est quasi-déployé,*

$$C_h(V) = C_{\text{FMT}}(V)$$

et V vérifie la propriété (E_V) .

Corollaire 6.2.16. *Si $V = P \backslash G$ est une variété de drapeaux généralisée pour un groupe semi-simple quasi-déployé G et un sous-groupe parabolique P défini sur k et si h est une hauteur quelconque, relative au faisceau ω_V^{-1} , alors*

$$n_\nu(H) \sim C_h(V) H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Cela résulte du corollaire précédant et de l'assertion (c) de la proposition 5.1. ■

7 Généralités sur les éclatements

7.1 Domaine fondamental pour l'action des unités

Soit V une variété de Fano obtenue en éclatant un diviseur rationnel D de \mathbf{P}_k^n . On suppose que ω_V^{-1} est très ample. Soit U le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices. Soit $\pi : V \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ la projection canonique. Quitte à restreindre U on peut supposer que $\pi(U) \xrightarrow{\sim} U$. On identifiera U avec son image. Comme dans la section 4.1, l'objectif est de se ramener de l'espace projectif à l'espace affine en utilisant un système de représentants. La méthode utilisée ici s'inspire également de celle introduite dans [Sc]. Une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ est donnée par des polynômes homogènes de degré $n+1$, $P_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ pour $1 \leq i \leq q$. Pour tout $\nu \in M_k$, on note

$$h_\nu(x_0, \dots, x_n) = \sup_{1 \leq i \leq q} |P_i(x_0, \dots, x_n)|_\nu.$$

La hauteur associée à la base choisie est donnée par

$$\forall (x_0 : \dots : x_n) \in U(k), h(x_0 : \dots : x_n) = \prod_{\nu \in M_k} h_\nu(x_0, \dots, x_n).$$

L'objectif est donc de se ramener de $U(k)$ à $W(k)$ cône au-dessus de $U(k)$. On fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$. On veut donc déterminer

$$N_{\mathfrak{a}}(H) = \#\mathcal{N}_{\mathfrak{a}}(H)$$

où $\mathcal{N}_a(H)$ désigne l'ensemble des $(n+1)$ -uplets $(\bar{x}_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{O}_k^{n+1}/U_k$ possédant un représentant $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ qui vérifie :

$$(7.1) \quad (x_i, 0 \leq i \leq n) = \alpha$$

$$(7.2) \quad h(x) \leq H$$

$$(7.3) \quad x \in W(k).$$

Pour cela on introduit comme dans la section 4.1 l'application \log_h définie par :

$$\begin{aligned} \log_h : \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu) &\rightarrow \mathbf{R}^{r_1+r_2} \\ (u_\nu)_{\nu \in M_\infty} &\mapsto \left(\log(h_\nu(u_\nu)) \right)_{\nu \in M_\infty}. \end{aligned}$$

On considère également la composée des applications canoniques

$$U_k \rightarrow \prod_{\nu \in M_\infty} k_\nu^* \xrightarrow{\log} \mathbf{R}^{M_\infty \times (n+1)} \xrightarrow{\times} \mathbf{R}^{M_\infty}.$$

Par le théorème des unités c'est un homomorphisme dont le noyau est le groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k et l'image un réseau L de rang r dans l'hyperplan P défini par $\sum_{\nu \in M_\infty} y_\nu = 0$. En outre, $\text{Det}L = (n+1)^r R$. Cet homomorphisme définit une action de U_k sur \mathbf{R}^{M_∞} . L'application \log_h est compatible avec les actions de U_k ainsi définies. Comme dans la section 4.1, on note par la projection sur P suivant $(N_\nu)_{\nu \in M_\infty}$ et on choisit u_1, \dots, u_r une base de L . On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} / 0 \leq u_j^y(\text{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta_h = \log_h^{-1}(F) \subset \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu).$$

Lemme 7.1.1 (Schanuel [Sc]) *L'ensemble Δ_h vérifie :*

- (i) Δ_h est stable sous $\mu_\infty(k)$,
- (ii) $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta_h \cap \Delta_h = \emptyset,$
- (iii) $\bigcup_{u \in U_k} u\Delta_h = \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu).$

On en déduit comme dans [Sc] le lemme suivant :

Lemme 7.1.2. *En notant $j : W(k) \rightarrow \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu)$ l'injection canonique,*

$$wN_a(H) = \#\mathcal{N}'_a(H)$$

où $\mathcal{N}'_a(H)$ désigne l'ensemble des $x \in \mathcal{O}_k^{n+1}$ vérifiant les conditions (7.1), (7.2) et (7.3) ci-dessus, ainsi que

$$(7.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

7.2 Volume du domaine fondamental

Pour tout $x \in \Delta_h$, posons $h_\infty(x) = \prod_{\nu \in M_\infty} h_\nu(x_\nu)$. Soit

$$\mathcal{D}_H = \{x \in \Delta_h / h_\infty(x) \leq H\}.$$

Comme nous le verrons un peu plus loin, le volume de \mathcal{D}_H intervient dans l'estimation du cardinal $\mathcal{N}'_d(H)$. Or la démonstration du lemme 4.2.5 implique le lemme suivant :

Lemme 7.2.1.

$$\text{Vol } \mathcal{D}_H = H \frac{\sqrt{dw}}{(n+1)h2^{(n+1)r_2}} \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1) \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(V_\nu).$$

8 Cas de l'éclatement de \mathbf{P}_k^2 en trois points rationnels et de ses analogues en dimension supérieure

Sauf indication du contraire, on se place sur un corps de nombres k arbitraire.

8.1 Construction de la hauteur et sous-variétés accumulatrices

On fixe un entier $n \geq 2$. La lettre V désigne ici la variété de Fano obtenue en éclatant dans l'ordre lexicographique les sous-espaces de codimension deux $P_{\{i,j\}}$ définis dans \mathbf{P}_k^n par $X_i = X_j = 0$ pour $0 \leq i < j \leq n$. Une base de $\text{Pic } V = \text{Pic } \bar{V}$ est donnée par $\Lambda = \pi^*(H)$ où H est un hyperplan ne contenant aucun des sous-espaces $P_{\{i,j\}}$ et les diviseurs $L_{i,j} = L_{\{i,j\}}$ au-dessus de $P_{\{i,j\}}$. On notera L_i les sous-variétés de V au-dessus des hyperplans P_i de \mathbf{P}_k^n définis par $X_i = 0$ pour $0 \leq i \leq n$. On pose

$$U = V - \bigcup_{0 \leq i < j \leq n} L_{i,j} - \bigcup_{0 \leq i \leq n} L_i.$$

Dans $\text{Pic } V$, on a la relation

$$[L_i] = [\Lambda] - \sum_{j \neq i} [L_{i,j}].$$

Un diviseur canonique de V est donné par

$$K = \sum_{0 \leq i < j \leq n} L_{i,j} - (n+1)\Lambda.$$

Une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ est donc donnée par les monomômes de degré $n+1$

$$X^k = \prod_{i=0}^n X_i^{k_i}$$

où au plus un des k_i est nul. On notera T_n l'ensemble de ces monômes. Sur U la hauteur correspondant à cette base est donnée par

$$h((x_0 : \dots : x_n)) = \prod_{\nu \in M_k} \sup_{Y \in T_n} |Y(x)|_\nu.$$

Les sections 8.2 à 8.5 ont pour objet la démonstration de l'équivalence

$$n_\nu(H) \sim C_h(V)H \log^{t-1} H.$$

Le lemme suivant montre donc que les sous-variétés $L_{i,j}$ et L_i sont effectivement accumulatrices.

Lemme 8.1.1. *Pour tout ouvert $U_{i,j}$ de $L_{i,j}$ et tout ouvert U_i de L_i ,*

$$\beta_{U_{i,j}} > 1 \text{ et } \beta_{U_i} > 1.$$

Démonstration. Ce résultat étant connu pour $n = 2$, on suppose $n \geq 3$. Les diviseurs $L_{i,j}$ sont isomorphes aux éclatés de $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^{n-2}$ en des sous-espaces de codimension 2. Ces sous-espaces appartiennent à l'ensemble des sous-espaces définis par les équations $U_i = 0, Y_j = 0$ pour $1 \leq i \leq 2$ et $0 \leq j \leq n-2$ et $Y_j = 0, Y_k = 0$ pour $0 \leq i < j \leq n-2$. Soit V_1 la variété obtenue en éclatant \mathbf{P}_k^n en $P_{\{0,1\}}$. Alors, d'après [Fu] 6.7, le fibré normal de $P_{\{0,1\}}$ étant $\mathcal{O}(1)^2$ celui de la sous-variété L au-dessus de $P_{\{0,1\}}$ est donné par

$$N_L(V_1) = \mathcal{O}_L(-1, 1).$$

Par conséquent sur V on obtient la formule

$$L_{0,1}.L_{0,1} = -[\pi^* \pi_1^*(P)] + [\pi^* \pi_2^*(H)]$$

où $\pi : L_{i,j} \rightarrow \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^{n-2}$ est l'application naturelle et

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^{n-2} &\rightarrow \mathbf{P}_k^1 \\ \pi_2 : \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^{n-2} &\rightarrow \mathbf{P}_k^{n-2} \end{aligned}$$

les projections canoniques, $P \in \mathbf{P}_k^1(k) - \{0, \infty\}$ et H un hyperplan rationnel de \mathbf{P}_k^{n-2} ne contenant aucun des sous-espaces ci-dessus. On montre de façon similaire la même formule pour les diviseurs $L_{i,j}$. Par ailleurs

$$\Lambda.L_{i,j} = \pi^* \pi_2^*(H)$$

et si $\{i, j\} \neq \{k, l\}$

$$L_{i,j}.L_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } L_{i,j} \cap L_{k,l} = \emptyset \\ D_{(i,j,k,l)} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $D_{(i,j,k,l)}$ est le cycle $L_{i,j} \cap L_{k,l}$ si cette intersection est non vide. On obtient que

$$\begin{aligned} & ((n+1)\Lambda - \sum_{0 \leq i < j \leq n} L_{i,j}) \cdot L_{i_0, j_0} \\ &= (n+1)[\pi^* \pi_2^*(H)] + [\pi^* \pi_1^*(P)] - [\pi^* \pi_2^*(H)] - \sum_{\{i,j\} \neq \{i_0, j_0\}} L_{i,j} \cdot L_{i_0, j_0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $h_{L_{i,j}}$ est la hauteur induite par h sur $L_{i,j}$ et $U_{i,j}$ un ouvert de $L_{i,j}$ contenu dans le complémentaire des $D_{(i,j,k,l)}$, le résultat de Schanuel montre que $\beta_{U_{i,j}} \geq 2$.

Sur un ouvert U_i de L_i contenu dans le complémentaire des $L_{i,j}$, la hauteur d'un élément $x = (x_0 : \dots : x_n)$ est donnée par

$$h(x) = \prod_{\nu \in M_k} \sup_{j \neq i} |x_j|_\nu \prod_{\nu \in M_k} \prod_{j \neq i} |x_j|_\nu = \prod_{\nu \in M_k} \sup_{j \neq i} |x_j|_\nu.$$

Le résultat de Schanuel montre alors que $\beta_{U_i} \geq n$. ■

8.2 Réécriture de la hauteur

Jusqu'à la section 8.4 on fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$. l'objectif est donc d'estimer le cardinal $N_{\mathfrak{a}}(H)$ des $x \in \mathcal{O}_k^{n+1}$ tels que

$$(8.1) \quad (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a}$$

$$(8.2) \quad h(x) \leq H$$

$$(8.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

$$(8.4) \quad j(x) \in \Delta_h$$

où j et Δ_h sont définis dans la section 7.1. On reprend également les notations h_ν et h_∞ de cette section. Soit x en élément de \mathcal{O}_k^{n+1} vérifiant (8.1) et (8.3), la hauteur de l'image \bar{x} de x dans U est donnée par

$$h(\bar{x}) = \frac{h_\infty(x)}{N((Y(x), Y \in T_n))}.$$

On note F' l'ensemble des parties à deux éléments de $\{0, \dots, n\}$,

$$F = \{0, \dots, n\} \cup F',$$

F'_m l'ensemble des m plus petits éléments de F' pour l'ordre lexicographique et

$$F_m = \{0, \dots, n\} \cup F'_m.$$

On pose également $F'_{m+1} - F'_m = \{\{i_m, j_m\}\}$. On notera $\tilde{\rho}_m : \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F_m} \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F_{m+1}}$ l'application définie par

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_i = \mathfrak{b}_i & \text{si } i \notin \{i_m, j_m\} \\ \tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_{\{i,j\}} = \mathfrak{b}_{\{i,j\}} & \text{si } \{i,j\} \in F'_m \\ \tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_{\{i_m, j_m\}} = \mathfrak{b}_{i_m} + \mathfrak{b}_{j_m} \\ \tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_i = \mathfrak{b}_i (\tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_{\{i_m, j_m\}})^{-1} & \text{si } i \in \{i_m, j_m\}. \end{cases}$$

On notera $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{\frac{n(n+1)}{2}-1} \circ \dots \circ \tilde{\rho}_0$ et

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{i,j} &= \tilde{\rho} \left(((x_l) \mathfrak{a}^{-1})_{0 \leq l \leq n} \right)_{\{i,j\}} \text{ si } i \neq j \\ \mathfrak{b}_i &= \tilde{\rho} \left(((x_l) \mathfrak{a}^{-1})_{0 \leq l \leq n} \right)_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

L'idéal $\mathfrak{d}_{i,j}$ correspond au diviseur $L_{i,j}$ de la manière suivante : si $\mathfrak{p} \in M_f$, l'entier $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_{i,j})$ est le degré d'intersection entre le diviseur induit par $L_{\{i,j\}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$, et le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -point de cette variété induit par $x \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1}$. D'une façon analogue, les idéaux

$$\mathfrak{b}_i = (x_i) \prod_{j \neq i} \mathfrak{d}_{i,j}^{-1} \mathfrak{a}^{-1}$$

correspondent aux diviseurs L_i .

Posons $\mathfrak{c} = ((x_l) \mathfrak{a}^{-1})_{0 \leq l \leq n}$ et $\mathfrak{c}^{(m)} = \tilde{\rho}_m \circ \dots \circ \tilde{\rho}_0(\mathfrak{c})$. Par récurrence on montre que

$$N((Y(x), Y \in T_n)) = N(\mathfrak{a})^{n+1} \left(\prod_{f \in F'_m} N(\mathfrak{c}_f^{(m)}) \right) N \left(\sum_{i \neq j} (\mathfrak{c}_{\{i\}}^{(m)})^2 \prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \mathfrak{c}_{\{k\}}^{(m)} \right).$$

Les idéaux $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{c}_i^{\binom{n(n+1)}{2}-1}$ étant premiers entre eux deux à deux, la hauteur de \bar{x} est donnée par

$$h(\bar{x}) = \frac{h_{\infty}(x)}{N((Y(x), Y \in T_n))} = \frac{h_{\infty}(x)}{N(\mathfrak{a})^{n+1} \prod_{0 \leq i < j \leq n} N(\mathfrak{d}_{i,j})}.$$

On introduit alors les notations suivantes : soit

$$\mathcal{H}_a = \{(x) \in \mathcal{O}_k^{n+1} / (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a} \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n\}.$$

Soit \mathcal{H}' l'ensemble des $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^F$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ on ait :

$$(C_{\mathfrak{p}}) \quad \forall G \subset F, \left(\bigcap_{f \in G} L_f = \emptyset \Rightarrow \inf_{f \in G} (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_f)) = 0 \right).$$

Pour tout $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{n+1 + \frac{n(n+1)}{2}}$, on note $n_{\mathfrak{b}, \mathfrak{d}}(H)$ le cardinal de l'ensemble des $x \in \mathcal{O}_k^{n+1}$ tels que

$$(8.1') \quad (x_i) = \mathfrak{a} \mathfrak{b}_i \prod_{j \neq i} \mathfrak{d}_{i,j}$$

$$(8.2') \quad h_{\infty}(x) \leq H N(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{0 \leq i < j \leq n} \mathfrak{d}_{i,j})$$

$$(8.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

Lemme 8.2.1.

$$wN_{\mathfrak{a}}(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{H}'} n_{\mathfrak{b}}(H).$$

Pour démontrer ce lemme il nous faut introduire quelques notations supplémentaires. Soit V_m la variété obtenue en éclatant les sous-espaces P_f pour $f \in F'_m$. On note $L_f(m)$ la sous-variété de V_m au-dessus de P_f pour $f \in F$. On note $\mathcal{H}(m)$ l'ensemble des $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F_m}$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on ait

$$(C_p(m)) \quad \forall G \subset F_m, \bigcap_{f \in G} L_f(m) = \emptyset \Rightarrow \inf_{f \in G} \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_f) = 0.$$

En particulier

$$\mathcal{H}(0) = \{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{n+1} / \inf_{0 \leq i \leq n} (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i)) = 0\}$$

et $\mathcal{H}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \mathcal{H}'$. Le lemme 8.2.1 résulte directement du lemme suivant :

Lemme 8.2.2. *$\tilde{\rho}$ induit une bijection ρ de $\mathcal{H}(0)$ sur \mathcal{H}' .*

Démonstration. Il suffit de démontrer que les applications $\tilde{\rho}_m$ induisent des bijections de $\mathcal{H}(m)$ sur $\mathcal{H}(m+1)$. On remarque d'abord que, si $G \subset F$,

$$\bigcap_{f \in G} L_f(m+1) = \emptyset$$

si et seulement si il existe $G' \subset G$ vérifiant une des deux conditions suivantes :

$$\bigcap_{f \in G'} L_f(m) = \emptyset$$

ou

$$\{i_m, j_m\} \notin G' \text{ et } \bigcap_{f \in G'} L_f(m) \subset L_{\{i_m, j_m\}}(m).$$

En outre, on montre aisément que, si $G' \subset F_m$ vérifie la seconde relation sans vérifier la première, alors $\{i_m, j_m\} \subset G'$.

• Pour montrer que $\tilde{\rho}_m(\mathcal{H}(m)) \subset \mathcal{H}(m+1)$, nous allons prouver que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ on a, d'une part,

$$\inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_{i_m}), \nu_{\mathfrak{p}}(\tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_{j_m})) = 0$$

et, d'autre part, si $G \subset F_{m+1}$ est tel que $\{i_m, j_m\} \in G$ et

$$\bigcap_{f \in G} L_f(k) \subset L_{\{i_k, j_k\}}(k) \text{ pour un } k < m$$

avec $\{i_k, j_k\} \notin G$ alors

$$\inf_{f \in G} (\nu_{\mathfrak{p}}(\tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_f)) = 0.$$

La première assertion résulte de la définition de $\tilde{\rho}_m$. Quand à la deuxième, il suffit d'écrire $G' = G - \{\{i_m, j_m\}\}$ et

$$\begin{aligned} \inf_{f \in G} (\nu_{\mathfrak{p}}(\tilde{\rho}_m(\mathfrak{b})_f)) &= \inf_{f \in G' \cup \{i_m, j_m\}} (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_f)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque \mathfrak{b} vérifie $(C_p(m))$.

- Soit $\tilde{\theta}_m : \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F_{m+1}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F_m}$ définie par

$$\begin{cases} \theta_m(\mathfrak{b})_f = \mathfrak{b}_f & \text{si } f \in F_m - \{i_m, j_m\} \\ \theta_m(\mathfrak{b})_i = \mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_{\{i_m, j_m\}} & \text{si } i \in \{i_m, j_m\}. \end{cases}$$

On a clairement $\tilde{\theta}_m \circ \tilde{\rho}_m = Id$.

- Vérifions que $\tilde{\theta}_m(\mathcal{H}(m+1)) \subset \mathcal{H}(m)$. Il suffit de démontrer que pour $G \subset F_m$ minimal pour la propriété $\bigcap_{f \in G} L_f(m) = \emptyset$ avec $i_m \in G$ ou $j_m \in G$ alors

$$\inf_{f \in G} (\nu_p(\theta_m(\mathfrak{b})_f)) = 0.$$

Or on a les relations

$$\inf_{f \in G} (\nu_p(\mathfrak{b}_f)) = 0$$

et

$$\inf_{f \in (G - \{i_m, j_m\}) \cup \{\{i_m, j_m\}\}} (\nu_p(\mathfrak{b}_f)) = 0.$$

Le résultat s'en déduit directement. On note θ_m l'application induite.

- Si $\mathfrak{b} \in \mathcal{H}(m+1)$, alors pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$

$$\inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_{i_m}), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_{j_m})) = 0$$

donc $\rho_m \circ \theta_m = Id$. ■

8.3 Estimations pour le corps des rationnels

Pour déterminer le cardinal $wN_a(H)$, nous allons tout d'abord chercher pour tout $(\mathfrak{c}) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{n+1}$ une estimation du cardinal $m_{\mathfrak{c}}(H)$ de l'ensemble des $(x) \in \prod_{i=0}^n \mathfrak{c}_i$ tels que :

$$(8.2'') \quad h_{\infty}(x) \leq H$$

$$(8.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

$$(8.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

On reprend la notation \mathcal{D}_H de la section 7.1.

Lemme 8.3.1. *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a pour tout $c \in \mathbf{N}^{n+1}$ les inégalités :*

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_H)}{\prod_{i=0}^n c_i} - B_1 \left(\sum_{i=0}^j \prod_{j \neq i} \frac{1}{c_i} \right) H^{\frac{n}{n+1}} \leq m_{\mathfrak{c}}(H) \leq \frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_H)}{\prod_{i=0}^n c_i}$$

où B_1 est une constante indépendante de H et de c .

Remarque. la difficulté pour généraliser le théorème 8.6.1 aux autres corps de nombres réside dans la démonstration de ce lemme ainsi que dans celle du lemme suivant. Il faudrait en particulier pouvoir majorer de manière suffisamment fine

$$\left| m_c(H) - \frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_H)}{\text{Det}(M)} \right|$$

où M est le réseau $j \left(\prod_{i=0}^n c_i \right)$ et donc

$$\text{Det}(M) = \frac{N \left(\prod_{i=0}^n c_i \right) \sqrt{d}^{n+1}}{2^{(n+1)r_2}}.$$

L'estimation de $m_c(H)$ se complique du fait que le domaine est non borné (si on ôte la condition $x_i \neq 0$, le cardinal de l'intersection du réseau avec \mathcal{D}_H est infini).

Démonstration. Dans cette démonstration, $k = \mathbf{Q}$. Fixons $c \in \mathbf{N}^{n+1}$. Majorons tout d'abord $m_c(H)$:

$$\begin{aligned} m_c(H) &= 2^{n+1} \# \left\{ x \in \prod_{i=0}^n (c_i) / \left\{ \begin{array}{l} x_i > 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n \\ x \in \mathcal{D}_H \end{array} \right. \right\} \\ &= 2^{n+1} \# \{ m \in \mathbf{N}^{n+1} / h_\infty((c_i m_i)_{0 \leq i \leq n}) \leq H \} \\ &= \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol} \{ x \in \mathbf{R}^{n+1} / (c_i E \left(\frac{x_i}{c_i} \right) + c_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_H \}. \end{aligned}$$

Or $h_\infty(x)$ est croissante en chacune des variable x_i pour $0 \leq i \leq n$. Donc

$$(c_i E \left(\frac{x_i}{c_i} \right) + c_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_H \Rightarrow (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_H.$$

Par conséquent on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} m_c(H) &\leq \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol} \{ x \in \mathbf{R}^{n+1} / x \in \mathcal{D}_H \} \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol}(\mathcal{D}_H). \end{aligned}$$

Majorons maintenant $\text{Vol}(\mathcal{D}_H)$:

$$\begin{aligned}
& \text{Vol}(\mathcal{D}_H) \\
&= 2^{n+1} \text{Vol}\{x \in \mathbf{R}^{+n+1} / x \in \mathcal{D}_H\} \\
&\leq 2^{n+1} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} / \left\{ \begin{array}{l} (c_i E(\frac{x_i}{c_i}))_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_H \\ E(\frac{x_i}{c_i}) \geq 1 \end{array} \right. \right\} \\
&\quad + 2^{n+1} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} / \left\{ \begin{array}{l} \exists i \in \{0, \dots, n\} / 0 \leq x_i \leq c_i \\ x \in \mathcal{D}_H \end{array} \right. \right\} \\
&\leq \left(\prod_{i=0}^n c_i \right) m_c(H) \\
&\quad + 2^{n+1} \left(\sum_{i=0}^n c_i \right) \text{Vol} \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{+n} / \sup_{Y \in \mathcal{T}_n} (Y(0, x_1, \dots, x_n)) \leq H \right\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \text{Vol} \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{+n} / \sup_{Y \in \mathcal{T}_n} (Y(0, x_1, \dots, x_n)) \leq H \right\} \\
&= H^{\frac{n}{n+1}} \text{Vol} \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{+n} / \sup_{1 \leq i \leq n} (x_i) x_1 \dots x_n < 1 \right\} \\
&= H^{\frac{n}{n+1}} \frac{(n+1)^n}{3}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $B_1 = \frac{(n+1)^n}{3}$. ■

Lemme 8.3.2. Si $c \in \mathbf{N}^{+n+1}$ vérifie $c_0 \geq H^{\frac{1}{n+1}}$, alors

$$m_c(H) \leq B_2 \frac{H^{1+\frac{1}{n-1}}}{c_0^{\frac{2+\frac{2}{n-1}}{n}} \prod_{i=1}^n c_i}$$

où B_2 est indépendante de c et de H .

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& m_c(H) \\
&\leq \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} / \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ h_\infty(x) \leq H \end{array} \right. \right\} \\
&\quad + \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=1}^n c_i} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n} / h_\infty(c_0, x_1, \dots, x_n) \leq H \right\}.
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned} & \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} / \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ h_\infty(x) \leq H \end{array} \right\} \right\} \\ & \leq n \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} / \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ x_0 \geq x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ x_0^2 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq H \end{array} \right\} \right\} \\ & \quad + n(n-1) \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} / \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ x_1 \geq x_i \geq x_n \text{ pour } i=0 \text{ ou } 2 \leq i \leq n-1 \\ x_1^2 x_0 \prod_{i=2}^{n-1} x_i \leq H \end{array} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Le premier des deux volumes que l'on notera \mathcal{V}_1 est majoré par

$$\begin{aligned} & \text{Vol} \left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} / \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ x_0^2 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq H \end{array} \right\} \right\} \\ & \leq \int_{c_0}^{+\infty} \text{Vol} \left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^n / \left\{ \begin{array}{l} x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq \frac{H}{x_0^2} \end{array} \right\} \right\} dx_0. \end{aligned}$$

Or les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1 \end{array} \right.$$

définissent un domaine de volume fini. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 & \leq B_3 \int_{c_0}^{+\infty} \left(\frac{H}{x_0^2} \right)^{\frac{n}{n-1}} dx_0 \\ & \leq B_3 \frac{H^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{\frac{2n}{n-1}-1}} \end{aligned}$$

où B_3 est indépendante de H et de c . Par ailleurs on a les inégalités

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 & \leq \text{Vol} \left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} / \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq c_0 \\ x_i \geq x_n \text{ pour } i=0 \text{ ou } 2 \leq i \leq n-1 \\ x_1^2 x_0 \prod_{i=2}^{n-1} x_i \leq H \end{array} \right\} \right\} \\ & \leq B_3 \frac{H^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{\frac{2n}{n-1}-1}}. \end{aligned}$$

Enfin le même raisonnement montre que

$$\begin{aligned} & \text{Vol} \{ x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} / h_\infty(c_0, x_1, \dots, x_n) \leq H \} \\ & \leq (n + n(n-1)) B_3 \frac{H^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{\frac{2n}{n-1}}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8.4 Sommation sur les idéaux

On considère l'ensemble $\mathcal{B} = \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}$. L'ensemble \mathcal{B} est un monoïde pour la multiplication terme à terme des idéaux. Si $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, on note :

$$(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{c} \in \mathcal{B} / \mathfrak{c}_f \subset \mathfrak{b}_f \text{ pour tout } f \in F'\}.$$

Nous allons maintenant étudier pour tout $(\mathfrak{b}_0) \in \mathcal{B}$ la somme

$$P_{\mathfrak{b}_0}^{\mathfrak{a}}(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_0)} n_{\mathfrak{b}}(H).$$

Il s'agit en réalité d'une somme finie. Comme on le verra dans la partie suivante, $wN_{\mathfrak{a}}(H)$ s'exprime en fonction de $P_{\mathfrak{b}_0}^{\mathfrak{a}}(H)$. Jusqu'à la fin de cette partie, on omettra \mathfrak{a} dans cette notation. Pour commencer, exprimons en général $P_{\mathfrak{b}_0}$ en termes des nombres $m_{\mathfrak{c}}$ définis au début de la partie 8.3.

Lemme 8.4.1. *On considère*

$$(\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0) \in \mathcal{B} = \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{n+1} \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}.$$

Posons, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mathfrak{c}_i^0 = \mathfrak{a} \mathfrak{b}_i^0 \prod_{j \neq i} \mathfrak{d}_{\{i,j\}}^0.$$

Alors on a l'égalité :

$$P_{\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0}(H) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}} m_{(\mathfrak{c}_i^0 \prod_{j \neq i} \mathfrak{d}_{\{i,j\}})_{0 \leq i \leq n}} \left(HN \left(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{f \in F'} \mathfrak{d}_f^0 \mathfrak{d}_f \right) \right).$$

En fait, comme nous le verrons dans la partie suivante, l'introduction de cette sommation correspond au choix du facteur de convergence $L_p(1, \text{Pic } \overline{V})$.

Démonstration. Soient $(\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0) \in \mathcal{B}$ que l'on fixe jusqu'à la fin de la démonstration. Pour tout élément $\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}$, je note $\mathcal{K}_{\mathfrak{d}}$ l'ensemble des

$$x \in \prod_{i=0}^n \left(\mathfrak{c}_i^0 \prod_{j \neq i} \mathfrak{d}_j \right)$$

vérifiant :

$$(8.2^{(3)}) \quad h_{\infty}(x) \leq HN \left(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{f \in F'} \mathfrak{d}_f^0 \mathfrak{d}_f \right)$$

$$(8.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

$$(8.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

On a d'une part la relation

$$\#\mathcal{K}_{\mathfrak{d}} = m_{\left(\left(\prod_{\substack{j \neq i \\ 0 \leq i \leq n}} v_{(i,j)}\right)\right)} \left(HN \left(\mathfrak{a}^{n+1} \prod_{f \in F'} \mathfrak{d}_f^0 \mathfrak{d}_f \right) \right)$$

et d'autre part

$$\#\mathcal{K}_{\mathfrak{d}} = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_0)} n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_0 \mathfrak{d})}(H)$$

et donc

$$P_{\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0}(H) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}} \#\mathcal{K}_{\mathfrak{d}}. \quad \blacksquare$$

Nous allons maintenant déduire du lemme précédant une estimation de $P_{\mathfrak{b}, \mathfrak{d}}(H)$ dans le cas où $k = \mathbf{Q}$.

Lemme 8.4.2. *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on pose $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et on obtient*

$$P_{b,d}(H) \sim C'' \frac{H \log^{t-1} H}{\prod_{0 \leq i \leq n} b_i \prod_{f \in F'} d_f} \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V$ et où la constante C'' est donnée par la formule :

$$C'' = (n+1) \alpha_c(V) \text{Vol} \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{t-1} \zeta_{\mathbf{Q}}^{t-1}(s).$$

De plus, on a la majoration :

$$P_b(H) \leq \text{Vol} \mathcal{D}_1 \frac{H(\log H + B_4)^{t-1}}{\prod_{f \in F} b_f}$$

où B_4 est une constante indépendante de b et de H .

Remarque. Ce lemme repose sur les lemmes 8.3.1 et 8.3.2 et n'est donc valable que sur le corps \mathbf{Q} . Si les lemmes 8.3.1 et 8.3.2 se généralisaient au cas du corps de nombres quelconque, alors on obtiendrait un lemme analogue avec une constante C'' de la forme :

$$C'' = (n+1) \alpha_c(V) \frac{2^{(n+1)r_2}}{\sqrt{d}^{n+1}} \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{t-1} \zeta_k^{t-1}(s).$$

D'après le lemme 7.2.1, on obtiendrait :

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{h \sqrt{d}^n} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_k^t(s) \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(V_\nu).$$

Démonstration. D'après le lemme 8.3.1, on sait que :

$$m_c(H') = \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H'}{\prod_{i=0}^n c_i} + R(c, H')$$

avec

$$-B_1 \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{\prod_{i \neq j} c_i} \right) H'^{\frac{n}{n+1}} \leq R(c, H') \leq 0.$$

On fixe (b^0, d^0) dans $\mathbf{N}^{+F'}$ et H dans \mathbf{R}^+ . Posons pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$c_i^0 = b_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}}^0.$$

Soit $H_0 = H \prod_{f \in F'} d_f^0$ et $h_0 = \log H_0$. On note \mathcal{P}_H l'ensemble des $(d) \in \mathbf{N}^{+F'}$ tels que

$$(**) \quad \begin{cases} d_f \geq 1 \text{ pour } f \in F' \\ c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}} \leq H_0^{\frac{1}{n+1}} \prod_{f \in F'} (d_f)^{\frac{1}{n+1}} \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{d \in \mathbf{N}^{+F'}} m_{(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}})_{0 \leq i \leq n}} \left(H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

où A_1, A_2 et A_3 sont définis par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H}{\prod_{i=0}^n b_i^0 \prod_{f \in F'} d_f^0} \sum_{d \in \mathcal{P}_H} \frac{1}{\prod_{f \in F'} d_f} \\ A_2 &= \sum_{d \in \mathcal{P}_H} R \left(\left(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}} \right)_{0 \leq i \leq n}, H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right) \\ A_3 &= \sum_{d \notin \mathcal{P}_H} m_{(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}})_{0 \leq i \leq n}} \left(H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right). \end{aligned}$$

- Commençons par évaluer A_1 . Tout d'abord calculons

$$W(H) = \int_{\{x \in \mathbf{R}^{+F'} / (**)\}} \frac{1}{\prod_{f \in F'} x_f} \prod_{f \in F'} dx_f.$$

Lemme 8.4.3.

$$W(H) \sim (n+1) \alpha_c(V) h_0^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ quand } H \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Posons $\lambda_i = (n+1) \log c_i^0$ pour $1 \leq i \leq 3$ et faisons le changement de variables $y_f = \log x_f$. On trouve :

$$W(H) = \text{Vol}(\mathcal{W}_H)$$

où \mathcal{W}_H est l'ensemble des $y \in \mathbf{R}^{F'}$ tels que

$$\begin{cases} y_f \geq 0 \text{ pour } f \in F' \\ (n+1) \sum_{j \neq i} y_{\{i,j\}} \leq h_0 - \lambda_i + \sum_{f \in F'} y_f \text{ si } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Par conséquent

$$W(H) \sim h_0^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{Vol}(\mathcal{W}')$$

où \mathcal{W}' est l'ensemble des $y \in \mathbf{R}^{F'}$ tels que

$$(***) \quad \begin{cases} y_f \geq 0 \text{ pour } f \in F' \\ (n+1) \sum_{j \neq i} y_{\{i,j\}} - \sum_{f \in F'} y_f \leq 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

La correspondance entre les idéaux $d_{\{i,j\}}$ et les diviseurs $L_{i,j}$ introduite dans la section 8.2 amène à considérer les y_f comme un système de coordonnées sur l'hyperplan défini par $x([\omega_V^{-1}]) = 0$ dans $(\text{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee$. Plus précisément, une base de $\text{NS}(V)$ est donnée par $[\Lambda]$ et les $[L_f]$ pour $f \in F'$. On note $(Y, Y_{\{i,j\}})$ le système de coordonnées correspondant à la base duale. L'équation $x([\omega_V^{-1}]) = 1$ s'écrit

$$(n+1)Y - \sum_{f \in F'} Y_f = 1.$$

La relation $x([L_{i,j}]) > 0$ s'écrit $Y_f > 0$ pour $f \in F'$ et $x([L_i]) > 0$ s'écrit

$$Y - \sum_{j \neq i} Y_{\{i,j\}} > 0.$$

Par conséquent le domaine

$$P = \left\{ x \in (\text{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee / \begin{cases} \text{pour tout } D \text{ effectif } x([D]) > 0 \\ x([\omega_V^{-1}]) = 1 \end{cases} \right\}$$

a pour équations

$$\begin{cases} (n+1)Y - \sum_{f \in F'} Y_f = 1 \\ Y_f > 0 \text{ pour } f \in F' \\ 1 + \sum_{f \in F'} Y_f - (n+1) \sum_{j \neq i} Y_{\{i,j\}} > 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Le domaine \mathcal{W}' est donc la projection de P sur l'hyperplan $Y = 0$. Par conséquent

$$\text{Vol}(\mathcal{W}') = (n+1)\alpha_c(V). \quad \blacksquare$$

Suite de la démonstration du lemme 8.4.2. Nous allons maintenant majorer la différence entre A_1 et $W(H)$.

$$\sum_{d \in \mathcal{P}_H} \frac{1}{\prod_{f \in F'} d_f} = \sum_{d \in \mathcal{P}_H} \prod_{f \in F'} (\log(d_f + 1) - \log d_f) + \sum_{d \in \mathcal{P}_H} \left(\prod_{f \in F'} \frac{1}{d_f} - \prod_{f \in F'} (\log(d_f + 1) - \log d_f) \right).$$

Notons $A_{1,1}$ la première somme et $A_{1,2}$ la seconde. On a la relation :

$$A_{1,1} = \text{Vol} \left(\bigcup_{d \in \mathcal{P}_H} \prod_{f \in F'} [\log(d_f + 1), \log d_f] \right)$$

et on en déduit que :

$$|A_{1,1} - W(H)| < \text{Vol} \left(\bigcup_{f \in F'} \prod_{f \in F'} [\log(d_f + 1), \log d_f] \right)$$

où la réunion est prise sur les $(d_f)_{f \in F'}$ tels que

$$\prod_{f \in F'} [\log(d_f + 1), \log d_f] \cap \mathcal{S}_H \neq \emptyset$$

\mathcal{S}_H désignant la surface du polyèdre défini par

$$\begin{cases} y_f \geq 0 \text{ pour } f \in F' \\ (n+1) \sum_{j \neq i} y_{\{i,j\}} - \sum_{f \in F'} y_f \leq h_0 - \lambda_i \text{ si } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Mais le diamètre de la boîte $\prod_{f \in F'} [\log(d_f + 1), \log d_f]$ est bornée par $\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$. Donc

$$\begin{aligned} |A_{1,1} - W(H)| &\leq \text{Vol}(\{x/d(x, \mathcal{S}_H) \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\}) \\ &\leq B_5 h_0^{\frac{n(n+1)}{2}-1} \text{ pour } H \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$A_{1,1} \sim W(H) \sim (n+1) \alpha_c(V) h_0^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Majorons maintenant $A_{1,2}$. Pour tout $a \in \mathbf{N}^+$ on a les inégalités :

$$\frac{1}{2a^2} \geq \frac{1}{a} - (\log(a+1) - \log(a)) \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |A_{1,2}| &\leq B_6 \sum_{d \in [1, H_0]^{F'}} \left(\sum_{f \in F'} \frac{1}{d_f^2 \prod_{g \neq f} d_g} \right) \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} B_6 \sum_{d \in [1, H_0]^{F'}} \frac{1}{d_{\{0,1\}}^2 \prod_{g \neq \{0,1\}} d_g} \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} B_6 \frac{\pi^2}{6} (\log(H_0) + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}-1} \end{aligned}$$

donc

$$A_1 \sim (n+1)\alpha_c(V) \log^{t-1} H.$$

• Majorons maintenant A_2 . On a les inégalités :

$$\left| R \left(\left(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}} \right)_{0 \leq i \leq n}, H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right) \right| \leq B_7 H^{\frac{n}{n+1}} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\left(\prod_{f \in F'} d_f \right)^{\frac{n}{n+1}}}{\prod_{j \neq i} \prod_{k \neq j} d_{\{j,k\}}} \right)$$

où on a posé

$$B_7 = B_1 \left(\sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{1}{c_j^0} \right) \left(\prod_{f \in F'} d_f^0 \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq (n+1) B_7 H^{\frac{n}{n+1}} \sum_{d \in \mathcal{P}_H} \frac{1}{\prod_{0 < j < k \leq n} d_{\{j,k\}}^{2-\frac{n}{n+1}} \prod_{j=1}^n d_{\{0,j\}}^{1-\frac{n}{n+1}}} \\ &\leq (n+1) B_7 H^{\frac{n}{n+1}} \sum_{d \in \mathcal{P}'_H} \frac{1}{\prod_{0 < j < k \leq n} d_{\{j,k\}}^{2-\frac{n}{n+1}} \prod_{j=1}^n d_{\{0,j\}}^{1-\frac{n}{n+1}}} \end{aligned}$$

où \mathcal{P}'_H désigne l'ensemble des $d \in \mathbf{N}^{+F'}$ tels que

$$\prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}} \leq H_0^{\frac{1}{n+1}} \prod_{f \in F'} d_f^{\frac{n}{n+1}} \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

La dernière somme est majorée par

$$\begin{aligned} &(n+1) \sum_{d \in (\mathbf{N}^+)^{F'}} \frac{1}{\prod_{0 < i < j \leq n} d_{\{i,j\}}^{2-\frac{n}{n+1}} \prod_{j \neq 0} d_{\{0,j\}}^{1-\frac{n}{n+1}}} \\ &\leq (n+1) \sum_{\substack{p_1^n \leq H_0 p_2 \\ p_2 \leq p_1^{\frac{n-1}{2}}}} \sum_{\substack{\prod_{i=1}^n d_{\{0,i\}} = p_1 \\ \prod_{0 < i < j \leq n} d_{\{i,j\}} = p_2}} \frac{1}{p_1^{1-\frac{n}{n+1}} p_2^{2-\frac{n}{n+1}}}. \end{aligned}$$

Or pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $k \in \mathbf{R}$ tel que $k < 1$, on a la majoration

$$\sum_{\substack{b \in (\mathbf{N}^+)^m \\ \prod_{i=1}^m b_i \leq \lambda}} \frac{1}{\prod_{i=1}^m b_i^k} \leq \frac{2}{1-k} \lambda^{1-k} (\log \lambda + 1)^{m-1}.$$

La somme ci-dessus admet donc les majorations suivantes

$$\begin{aligned}
& \sum_{p_2^{\frac{2}{n-1}} \leq H_0^{\frac{1}{n}} p_2^{\frac{1}{n}}} \sum_{\substack{0 < i < j \leq n \\ d_{\{i,j\}} = p_2 \\ \prod_{i=1}^n d_{\{0,i\}} \leq (H_0 p_2)^{\frac{1}{n}}}} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n d_{\{0,i\}} \right)^{\frac{1}{n+1}} p_2^{1 + \frac{1}{n+1}}} \\
& \leq \frac{2}{1 - \frac{1}{n+1}} \sum_{p_2 \leq H_0^{\frac{n-1}{n+1}}} \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{(2 \log H_0 + 1)^{n-1} (H_0 p_2)^{\frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n+1})}}{p_2^{1 + \frac{1}{n+1}}} \\
& \leq 2 \frac{n+1}{n} \sum_{\substack{0 < i < j \leq n \\ d_{\{i,j\}} \leq H_0^{\frac{n-1}{n+1}}}} \frac{(2 \log H_0 + 1)^{n-1} H_0^{\frac{1}{n+1}}}{\prod_{0 < i < j \leq n} d_{\{i,j\}}} \\
& \leq 2 \frac{n+1}{n} (2 \log H_0 + 1)^{\frac{n(n-1)}{2} + n-1} H_0^{\frac{1}{n+1}}.
\end{aligned}$$

En conclusion

$$A_2 = O(H \log^{t-2} H).$$

• Nous allons maintenant majorer le terme A_3 . D'après le lemme 8.3.2, si $c_0^0 \prod_{j \neq 0} d_{\{0,j\}} \geq H_0^{\frac{1}{n+1}} \left(\prod_{f \in F'} d_f \right)^{\frac{1}{n+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| m(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}})_{0 \leq i \leq n} \left(H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right) \right| \\
& \leq B_8 \frac{H^{1 + \frac{1}{n-1}} \left(\prod_{f \in F'} d_f \right)^{1 + \frac{1}{n-1}}}{\left(\prod_{j \neq 0} d_{\{0,j\}} \right)^{2 + \frac{2}{n-1}} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}}}
\end{aligned}$$

où on a posé

$$B_8 = \sup_{0 \leq i \leq n} \frac{B_2 \left(\prod_{f \in F'} d_f^0 \right)^{1 + \frac{1}{n-1}}}{(c_i^0)^{2 + \frac{2}{n-1}} \prod_{j \neq i} c_j^0}.$$

En outre, s'il existe $f \in F'$ tel que $d_f \geq H \text{Vol}(\mathcal{D}_1)$ alors

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H}{\prod_{i=0}^n b_i^0 \prod_{f \in F'} d_f^0 d_f} < 1$$

et par conséquent

$$m(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}})_{0 \leq i \leq n} \left(H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right) = 0.$$

On en déduit, en posant $H'_0 = \inf_{0 \leq i \leq n} \frac{H_0}{c_i^{n+1}}$,

$$\begin{aligned}
A_3 &\leq (n+1)B_8 H^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{\substack{1 \leq d_{\{0,i\}} \leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1) H \\ \prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}} \geq H_0^{\frac{1}{n+1}} \prod_{f \in F'} d_f^{\frac{1}{n+1}}}} \frac{1}{\prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}}^{2+\frac{1}{n-1}} \prod_{0 < i < j \leq n} d_{\{i,j\}}^{1-\frac{1}{n-1}}} \\
&\leq (n+1)B_8 H^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{\substack{\prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}} \leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1^n) H^n \\ \prod_{0 < i < j \leq n} d_{\{i,j\}} H'_0 \leq \prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}}^n}} \frac{1}{\prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}}^{2+\frac{1}{n-1}} \prod_{0 < i < j \leq n} d_{\{i,j\}}^{1-\frac{1}{n-1}}} \\
&\leq B_9 H^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{\prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}} \leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1^n) H^n} \frac{(\log H + 1)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} \prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}}^{\frac{n}{n-1}}}{H_0^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}}^{2+\frac{1}{n-1}}} \\
&\leq B_{10} H (\log H + 1)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} \sum_{\prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}} \leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1^n) H^n} \frac{1}{\prod_{i \neq 0} d_{\{0,i\}}} \\
&\leq B_{11} H (\log H + 1)^{\frac{n(n-1)}{2}-1+n}.
\end{aligned}$$

On obtient également :

$$A_3 = O(H \log^{t-2} H).$$

• Majorons maintenant $P_{b,d}(H)$ de manière uniforme. S'il existe $f \in F'$ tel que $d_f \geq H \text{Vol}(\mathcal{D}_1)$ alors

$$m(c_i^0 \prod_{j \neq i} d_{\{i,j\}})_{0 \leq i \leq n} \left(H_0 \prod_{f \in F'} d_f \right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
P_{b^0,d^0}(H) &\leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H}{\prod_{i=0}^n b_i^0 \prod_{f \in F'} d_f^0} \sum_{1 \leq d_f \leq H \text{Vol}(\mathcal{D}_1)} \frac{1}{\prod_{f \in F'} d_f} \\
&\leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H (\log H + \log \text{Vol}(\mathcal{D}_1) + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{i=0}^n b_i^0 \prod_{f \in F'} d_f^0}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

8.5 Formule d'inversion

Notre but est maintenant de construire l'analogue de la formule d'inversion de Möbius. Si $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, on note :

$$\beta(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{f \in F} N(\mathfrak{b}_f)},$$

et pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$,

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_f))_{f \in F}.$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on pose également : si $n = (n_g)_{g \in F} \in \mathbf{N}^F$, $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_g})_{g \in F}$ et si $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, $\mathfrak{b}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})}$. Si B est un sous-ensemble de \mathcal{B} , sa fonction caractéristique est notée χ_B .

Lemme 8.5.1. *Il existe une unique fonction $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que :*

$$(a) \quad \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}.$$

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes :

$$(b) \quad \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}) \text{ pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B},$$

$$(c) \quad \sum_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(1, \text{Pic } \bar{V})},$$

$$(d) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

Démonstration.

• Si $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathcal{B}$, on note : $\mathfrak{b} | \mathfrak{b}'$ si et seulement si $\mathfrak{b}' \in (\mathfrak{b})$. Une fonction μ vérifie (a) si et seulement si

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \mu(\mathfrak{b}) = \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de μ .

• Montrons (b) par récurrence sur $\#\{\mathfrak{b}' \in \mathcal{B} / \mathfrak{b}' | \mathfrak{b}\}$. On remarque tout d'abord que pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$,

$$\chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}).$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $\mathfrak{b}' | \mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}$, on a

$$\mu(\mathfrak{b}') = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_\mathfrak{p}).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_\mathfrak{p}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}) + \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \leq \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})} \mu(\mathfrak{p}^n) - \sum_{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_\mathfrak{p}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

• Démontrons (c). Soit $n \in \mathbf{N}^F$. Montrons tout d'abord par récurrence sur $|n| = \sum_{g \in F} n_g$ que s'il existe $f \in F$ tel que $n_f \geq 2$ alors $\mu(\mathbf{p}^n) = 0$. Soit n' défini par

$$\begin{cases} n'_g = n_g \text{ si } g \neq f \\ n'_f = n_f - 1. \end{cases}$$

Alors on a

$$\chi_{\mathcal{H}'}(\mathbf{p}^n) = \chi_{\mathcal{H}'}(\mathbf{p}^{n'})$$

et

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{H}'}(\mathbf{p}^n) &= \mu(\mathbf{p}^n) + \sum_{\substack{\mathbf{b} | \mathbf{p}^n \\ \mathbf{b} \neq \mathbf{p}^n}} \mu(\mathbf{b}) \\ &= \mu(\mathbf{p}^n) + \sum_{\substack{\mathbf{b} | \mathbf{p}^{n'} \\ \mathbf{b} \neq \mathbf{p}^{n'}}} \mu(\mathbf{b}) + \sum_{\substack{\mathbf{p}^k | \mathbf{p}^n \\ k \neq n \\ k_f = n_f}} \mu(\mathbf{p}^k). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $\mu(\mathbf{p}^k) = 0$ si $\mathbf{p}^k | \mathbf{p}^n$, $k \neq n$ et $k_f = n_f > 1$. Donc $\mu(\mathbf{p}^n) = 0$.

• A toute application $\phi : \{0, 1\}^F \rightarrow \mathbf{Z}$ on associe le polynôme

$$S_F(\phi)(T) = \sum_{n \in \{0, 1\}^F} \phi(n) T^{|n|}.$$

La somme que nous voulons calculer s'exprime alors de la manière suivante

$$\sum_{n \in \{0, 1\}^F} \mu(\mathbf{p}^n) \beta(\mathbf{p}^n) = S_F(\mu) \left(\frac{1}{N(\mathbf{p})} \right)$$

où on note également $\mu : \{0, 1\}^F \rightarrow \mathbf{Z}$
 $n \mapsto \mu(\mathbf{p}^n)$. On introduit sur $\{0, 1\}^F$ l'ordre suivant $n|m$ si et seulement si pour tout $f \in F$, $n_f \leq m_f$. On a donc

$$\chi_{\mathcal{H}'}(n) = \sum_{m|n} \mu(m)$$

et donc

$$\begin{aligned} S_F(\chi_{\mathcal{H}'})(T) &= \sum_{n \in \{0, 1\}^F} \chi_{\mathcal{H}'}(n) T^{|n|} \\ &= \sum_{n \in \{0, 1\}^F} \sum_{m|n} \mu(m) T^{|n|} \\ &= \sum_{m \in \{0, 1\}^F} \mu(m) T^{|m|} \sum_{m|n} T^{|n|-|m|} \\ &= \sum_{m \in \{0, 1\}^F} \mu(m) T^{|m|} \sum_{i \leq \#F - |m|} C_{\#F - |m|}^i T^i \\ &= \sum_{m \in \{0, 1\}^F} \mu(m) T^{|m|} (1 + T)^{\#F - |m|} \\ &= (1 + T)^{\#F} \sum_{m \in \{0, 1\}^F} \mu(m) \left(\frac{T}{1 + T} \right)^{|m|}. \end{aligned}$$

On obtient donc la relation

$$\begin{aligned} S_F(\mu)(T) &= (1-T)^{\#F} S_F(\chi_{\mathcal{H}'}) \left(\frac{T}{1-T} \right) \\ &= (1-T)^{\text{rg Pic } V} T^{\dim V} \sum_{n \in \{0,1\}^F} \chi_{\mathcal{H}'}(n) \left(\frac{1-T}{T} \right)^{\dim V - |n|}. \end{aligned}$$

Lemme 8.5.2.

$$\sum_{n \in \{0,1\}^F} \chi_{\mathcal{H}'}(n) (N(\mathfrak{p}) - 1)^{\dim V - |n|} = \#V(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}).$$

Démonstration. Soit $\gamma : \mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \{0,1\}^F$ l'application qui à x associe la fonction caractéristique de $\{f/x \in L_f\}$. L'application γ induit une surjection

$$\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathcal{H}}' = \{n \in \{0,1\}^F / \chi_{\mathcal{H}'}(n) = 1\}.$$

En outre on vérifie que l'image réciproque par γ d'un point n de $\tilde{\mathcal{H}}'$ est isomorphe à

$$(\mathbf{A}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}^1 - \{0\})^{\dim V - |n|}. \quad \blacksquare$$

L'interprétation de la valeur locale dans le cas particulier où $n = 2$ m'a été indiquée par Manin à qui elle avait été montrée par Beukers.

Fin de la démonstration du lemme 8.5.1.

- Nous allons maintenant démontrer (d). Si $n \in \mathbf{N}^F$ vérifie $|n| = 1$ alors

$$\chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^n) = 1 = \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^0)$$

et $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$. Par conséquent

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^F} |\mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n)| \leq 1 + \sum_{n \in \mathbf{N}^F - \{0\}} |\mu(\mathfrak{p}^n)| \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}$$

On note $B_{12} = \sum_{n \in \mathbf{N}^F - \{0\}} |\mu(\mathfrak{p}^n)|$ Donc pour tout $\mathfrak{b}_0 \in \mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} \\ \mathfrak{v} | \mathfrak{b}_0}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| &= \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} \\ \mathfrak{v} | \mathfrak{b}_0}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} |\mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})| \beta(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \leq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_0)} |\mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n)| \\ &\leq \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \in \mathbf{N}^F} |\mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n)| \\ &\leq \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left(1 + \frac{B_{12}}{N(\mathfrak{p})^2} \right) \\ &< +\infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Il faut remarquer que c'est la sommation de la section 8.4 qui introduit le facteur $\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{\text{rg Pic } V}$ et rend convergente la série ci-dessus.

La formule d'inversion implique le lemme suivant valable sur tout corps de nombres et qui va nous permettre d'utiliser l'estimation du lemme 8.4.2.

Lemme 8.5.3.

$$wN_a(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) P_{\mathfrak{b}}(H).$$

Démonstration. Ceci résulte des lemmes 8.2.1 et 8.5.1. ■

8.6 Enoncé du résultat

Théorème 8.6.1. *Soit V la variété de Fano obtenue en éclatant dans un ordre arbitraire les $n(n+1)/2$ sous-espaces de codimension 2 de \mathbf{P}_k^n définis par les équations*

$$X_i = X_j = 0 \text{ pour } 0 \leq i < j \leq n.$$

Soit U le complémentaire dans V des sous-variétés accumulatrices alors

$$n_U(H) \sim C_h(V) H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Démonstration. Sur un corps de nombres quelconque on a

$$n_U(H) = \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} N_{\bar{\mathfrak{a}}}(H) = \frac{1}{w} \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{a}} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k) \\ \mathfrak{b} \in \mathcal{B}}} \mu(\mathfrak{b}) P_{\mathfrak{b}}^{\bar{\mathfrak{a}}}(H).$$

Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a posé $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et, d'après le lemme 8.4.2, on a l'équivalence :

$$P_{\mathfrak{b}}(H) \sim C'' H \log^{t-1} H \beta(\mathfrak{b})$$

où

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{\sqrt{d}^n h} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_{\mathbf{Q}}^t(s) \omega_{\mathbf{R}}(V_{\mathbf{R}})$$

et la majoration

$$P_{\mathfrak{b}}(H) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 H (\log H + B_4)^{t-1} \beta(\mathfrak{b}).$$

Soit $\epsilon \in \mathbf{R}_+^*$, soit $I \subset \mathcal{B}$ fini tel que :

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}-I} |\beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b})| \leq \frac{\epsilon}{2(1/2C'' + \text{Vol } \mathcal{D}_1)}.$$

Soit H_0 tel que $H \geq H_0$ implique

$$\forall \mathfrak{b} \in I, \quad |P_{\mathfrak{b}}(H) - C'' H \log^{t-1} H \beta(\mathfrak{b})| < \frac{\epsilon}{2\#I} H \log^{t-1} H$$

et

$$H(\log H + B_A)^{t-1} \leq 2H \log^{t-1} H.$$

Alors $H \geq H_0$ implique

$$\begin{aligned} & \left| n_{\nu}(H) - \frac{h}{w} C'' H \log^{t-1} H \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b}) \right| \\ & \leq \left(\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}-I} \left(\frac{2}{2} \text{Vol} \mathcal{D}_1 + \frac{h}{w} C'' \right) |\beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b})| + \sum_{\mathfrak{b} \in I} \frac{\epsilon}{2\#I} \right) H \log^{t-1} H \\ & \leq \epsilon H \log^{t-1} H. \end{aligned}$$

Donc

$$n_{\nu}(H) \sim C' H \log^{t-1} H$$

où

$$\begin{aligned} C' &= \frac{h}{w} \alpha_{\mathfrak{c}}(V) \frac{w}{\sqrt{d}^n h} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_{\mathbf{Q}}^t(s) \omega_{\mathbf{R}}(V_{\mathbf{R}}) \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} (\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}})) \\ &= C_h(V). \end{aligned}$$

En outre sur l'ouvert U , la hauteur est indépendante de l'ordre choisi sur F , le résultat est donc indépendant de cet ordre. ■

Dans le cas d'un corps de nombres quelconque, la constante obtenue serait également, d'après la remarque suivant le lemme 8.4.2, la constante $C_h(V)$. En outre les volumes de V_{ν} aux places à l'infini se calculent explicitement et on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_{\nu}(V_{\mathbf{R}}) &= (n+1)! 2^n \\ \omega_{\nu}(V_{\mathbf{C}}) &= (n+1)! (2\pi)^n. \end{aligned}$$

9 Cas de l'éclatement en un point rationnel

Comme dans le cas précédant, les démonstrations sont faites dans la mesure du possible sur un corps de nombres quelconque. En outre les démonstrations étant similaires, nous n'en indiquerons que les points clefs.

9.1 Construction de la hauteur

La lettre V désigne ici la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant le point

$$P = (0 : 0 : 1)$$

sur \mathbf{P}_k^2 . On note L le diviseur au-dessus de P . En ce cas, le complémentaire des sous-variétés accumulatrices est l'ouvert $U = V - L$ et on peut prendre $-K = 3\Lambda - L$. La hauteur peut être prise de la forme

$$h((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{\nu \in M_k} \sup(|x_1|_\nu^3, |x_2|_\nu^3, |x_1 x_3|_\nu^2, |x_2 x_3|_\nu^2).$$

9.2 Réécriture de la hauteur

On fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$. On utilise le domaine fondamental Δ_h défini dans la partie 7.1 et on se ramène à calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(H)$ des éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (9.1) \quad & (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \\ (9.2) \quad & h((x_1 : x_2 : x_3)) \leq H \\ (9.3) \quad & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ (9.4) \quad & j(x) \in \Delta_h. \end{aligned}$$

En outre comme la contribution des droites $x_i = 0$ sont des $O(H)$ et donc négligeables devant $H \log H$, on peut remplacer la condition (3) par la condition

$$(9.3') \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3.$$

Par ailleurs la hauteur peut se mettre sous la forme

$$h((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{h_{\infty}(x_1, x_2, x_3)}{N(\mathfrak{a})^2 N((x_1, x_2))}.$$

On note également

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{a}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3 / (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3\}$$

et \mathcal{H}' l'ensemble des quadruplets $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on ait

$$(C_{\mathfrak{p}}) \quad \begin{cases} \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_3), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_3)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_2)) = 0 \end{cases}$$

et on définit $\rho : \mathcal{H}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathcal{H}'$ par $\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$ avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_3 &= (x_1, x_2)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 &= x_1 \mathfrak{d}_3^{-1} \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 &= x_2 \mathfrak{d}_3^{-1} \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_3 &= x_3 \mathfrak{a}^{-1}. \end{aligned}$$

On note $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$ un quadruplet $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$. On note $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(H)$ le cardinal de l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ qui vérifient

$$(9.1') \quad \begin{aligned} (x_1) &= \mathfrak{a} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{d}_3 \\ (x_2) &= \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2 \mathfrak{d}_3 \\ (x_3) &= \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3 \end{aligned}$$

ainsi que

$$(9.2') \quad h_\infty(x_1, x_2, x_3) \leq HN(\mathfrak{a}^3 \mathfrak{d}_3)$$

$$(9.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

Lemme 9.2.1.

$$\mathcal{N}'_d(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{H}'} n_{\mathfrak{b}}(H).$$

9.3 Estimations pour le corps des rationnels

Comme dans le cas de trois points rationnels, on commence par estimer le nombre $m_{c_1, c_2, c_3}(H)$ des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$ tels que $x_i \neq 0$ et $h_\infty(x_1, x_2, x_3) \leq H$. On note

$$\mathcal{D}_H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^{3N} / (x_1, x_2, x_3) \in \Delta_h \text{ et } h_\infty(x_1, x_2, x_3) \leq H\}.$$

Lemme 9.3.1. *Si $k = \mathbf{Q}$, il existe une constante B_1 telle que*

$$\frac{\text{Vol } \mathcal{D}_H}{c_1 c_2 c_3} - B_1 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_2 c_3} + \frac{1}{c_3 c_1} \right) H^{2/3} \leq m_{c_1, c_2, c_3}(H) \leq \frac{\text{Vol } \mathcal{D}_H}{c_1 c_2 c_3}.$$

En outre $m_{c_1, c_2, c_3}(H)$ est nul si $\sup(c_1, c_2) > H^{1/3}$.

Démonstration. la première assertion se démontre comme dans le cas de trois points rationnels. La seconde résulte du fait que

$$h_\infty(x_1, x_2, x_3) = \sup(|x_1^3|, |x_2^3|, |x_1 x_3^2|, |x_2 x_3^2|). \quad \blacksquare$$

9.4 Sommation sur les idéaux

Comme dans la partie 8.4, on pose $\mathcal{B} = \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^4$ et on reprend la notation (b). On considère également

$$P_{\mathfrak{b}^0}(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}^0)} n_{\mathfrak{b}}(H).$$

On montre comme précédemment

Lemme 9.4.1.

$$P_{\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0}(H) = \sum_{\mathfrak{d}_3 \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} m_{\mathfrak{a} \mathfrak{b}_1^0 \mathfrak{d}_3^0, \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2^0 \mathfrak{d}_3^0, \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3^0} (HN(\mathfrak{a}^3 \mathfrak{d}_3^0 \mathfrak{d}_3)).$$

Sur \mathbf{Q} , on obtient les résultats suivants :

Lemme 9.4.2.

$$P_{b,d}(H) \sim C'' \frac{H \log H}{d_3 b_1 b_2 b_3} \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_{\mathbf{Q}}(s)$ et il existe une constante B_2 telle que

$$P_{b,d}(H) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{H(\log H + B_2)}{d_3 b_1 b_2 b_3}.$$

Démonstration. Dans ce cas $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$. Posons $H_0 = H d_3^0$, $c_1^0 = d_3^0 b_1^0$, $c_2^0 = d_3^0 b_2^0$ et $c_3^0 = b_3^0$, $B_3 = \sup(c_1^0, c_2^0)$ et

$$A = \sum_{d_3 \geq 1} m_{c_1^0 d_3, c_2^0 d_3, c_3^0}(H_0 d_3).$$

Alors $A = A_1 + A_2$ avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{H_0}{c_1^0 c_2^0 c_3^0} \sum_{\substack{1 \leq d_3 \leq \frac{H_0^{1/2}}{B_3^{1/2}}}} \frac{1}{d_3} \\ &\sim \frac{1}{2} \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{H \log H}{d_3^0 b_1^0 b_2^0 b_3^0} \end{aligned}$$

et $\frac{1}{2} = 3\alpha_c(V)$. Par ailleurs A_2 est négatif et

$$\begin{aligned} -A_2 &< B'_1(c^0) \sum_{1 \leq d_3 \leq H_0^{1/2}} \left(\frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_3} \right) H^{2/3} d_3^{2/3} \\ &= O(H) \end{aligned}$$

où $B'_1(c^0)$ est indépendant de d_3 . La majoration uniforme s'obtient comme dans le cas de trois points rationnels. ■

9.5 Formule d'inversion

Si $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, on note :

$$\beta(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 N(\mathfrak{b}_i)}.$$

Lemme 9.5.1. *Il existe une unique fonction $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que :*

$$(a) \quad \chi_{\mathfrak{h}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}.$$

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes :

$$(b) \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \text{ pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B},$$

$$(c) \sum_{n \in \mathbb{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

$$(d) \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

La démonstration est la même que dans la partie 8.5.

9.6 Énoncé du résultat

Tous les éléments sont donc réunis pour reproduire la fin de la démonstration du cas précédant et démontrer la formule 2.2.1 dans ce cas.

Théorème 9.6.1. *Soit V est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un point rationnel sur $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^2$. Soit U le complémentaire dans V du diviseur exceptionnel. Alors*

$$n_{\nu}(H) \sim C_h(V) \log^{t-1} H$$

où $t = \text{rg Pic } V = 2$.

En outre, on vérifie aisément que si $N_{\nu} = 1$

$$\omega_{\nu}(\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2) = 16$$

et si $N_{\nu} = 2$

$$\omega_{\nu}(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2) = 4(2\pi)^2.$$

10 Cas de l'éclatement en deux points rationnels

10.1 Construction de la hauteur

Dans toute cette partie, V est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points

$$P_1 = (0 : 0 : 1) \text{ et } P_2 = (0 : 1 : 0)$$

sur $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^2$. On note L_i les diviseurs au-dessus de P_i et $L_{1,2}$ le diviseur au-dessus de la droite $X_1 = 0$. On note U l'ouvert $V - L_1 - L_2 - L_{1,2}$. Un diviseur canonique est donné par

$$K = L_1 + L_2 - 3\Lambda$$

et la hauteur peut être prise de la forme

$$h((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{\nu \in M_k} \sup(|x_1|_{\nu}^3, \sup_{\substack{i \neq j \\ j \neq 1}} |x_i x_j^2|_{\nu}).$$

10.2 Réécriture de la hauteur

On fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$. Comme d'habitude, on se ramène à calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(H)$ des éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ vérifiant les conditions

$$(10.1) \quad (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a}$$

$$(10.2) \quad h((x_1 : x_2 : x_3)) \leq H$$

$$(10.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 3$$

$$(10.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

En outre

$$h((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{h_{\infty}(x_1, x_2, x_3)}{N(\mathfrak{a})N((x_1, x_2)(x_1, x_3))}.$$

On note $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ vérifiant les conditions (10.1) et (10.3) ci-dessus et \mathcal{H}' l'ensemble des $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3)$ tels que, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on ait

$$(C_{\mathfrak{p}}) \quad \begin{cases} \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_i)) = 0 \text{ pour } i = 2, 3 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_2), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_3)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_2)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_3)) = 0. \end{cases}$$

On définit $\rho : \mathcal{H}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathcal{H}'$ par $\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$ avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_3 &= (x_1, x_2)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{d}_2 &= (x_1, x_3)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 &= (x_1)\mathfrak{d}_3^{-1}\mathfrak{d}_2^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 &= (x_2)\mathfrak{d}_3^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_3 &= (x_3)\mathfrak{d}_2^{-1}\mathfrak{a}^{-1}. \end{aligned}$$

Pour tout $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{H}'$, on note $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(H)$ le cardinal de l'ensemble des $x \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ qui vérifient

$$(10.1) \quad \begin{cases} (x_1) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2 \\ (x_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}_3 \\ (x_3) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3\mathfrak{d}_2 \end{cases}$$

ainsi que

$$(10.2') \quad h_{\infty}(x) \leq HN(\mathfrak{a}^3\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2)$$

$$(10.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

Lemme 10.2.1.

$$\#\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(H) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{H}'} n_{\mathfrak{b}}(H).$$

10.3 Estimations sur le corps des rationnels

On utilise des notations analogues à celles de la section 8.3.

Lemme 10.3.1. *Si $k = \mathbf{Q}$, il existe une constante B_1 telle que*

$$\frac{\text{Vol } \mathcal{D}_H}{c_1 c_2 c_3} - B_1 \left(\frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_2 c_3} + \frac{1}{c_3 c_1} \right) H^{2/3} \leq m_{c_1, c_2, c_3}(H) \leq \frac{\text{Vol } \mathcal{D}_H}{c_1 c_2 c_3}.$$

En outre, $m_{c_1, c_2, c_3}(H)$ est nul si $c_1 > H^{1/3}$.

10.4 Sommation sur les idéaux

Lemme 10.4.1. *Avec les notations usuelles,*

$$P_{b_0, d_0}(H) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^2} m_{c_1^0, d_2, d_3, c_2^0, d_3, c_3^0, d_2}(H_0 N(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3))$$

où

$$\begin{aligned} H_0 &= HN(a^3 d_2^0 d_3^0) \\ c_1^0 &= ab_1^0 d_2^0 d_3^0 \\ c_2^0 &= ab_2^0 d_3^0 \\ c_3^0 &= ab_3^0 d_2^0. \end{aligned}$$

Lemme 10.4.2. *Sur \mathbf{Q} , on a l'équivalence*

$$P_{b,d}(H) \sim C'' \frac{H \log^2 H}{b_1 b_2 b_3 d_2 d_3} \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où

$$C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s)$$

et il existe une constante B_2 telle que

$$P_{b,d}(H) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{H(\log H + B_2)^2}{b_1 b_2 b_3 d_2 d_3}.$$

Remarque. Si le lemme 10.3.1 se généralisait à un corps de nombres quelconque, on obtiendrait un lemme analogue avec

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{h\sqrt{d}} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^3 \zeta_k^3(s) \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(V_\nu).$$

Démonstration. Ici $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$, $H_0 = Hd_2^0d_3^0$, $c_1^0 = b_1^0d_2^0d_3^0$, $c_2^0 = b_2^0d_3^0$ et $c_3^0 = b_3^0d_2^0$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(d_2, d_3) \in (N^+)^2} m_{c_1^0 d_2 d_3, c_2^0 d_3, c_3^0 d_2}(H_0 d_2 d_3) \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{H_0}{c_1^0 c_2^0 c_3^0} \sum_{\substack{(d_2, d_3) \in (N^+)^2 \\ d_2 d_3 \leq \frac{H_0^{1/2}}{c_1^{0.3/2}}}} \frac{1}{d_2 d_3} \\ &\sim \frac{\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s) \text{Vol } \mathcal{D}_1 H \log^2 H}{b_1^0 b_2^0 b_3^0 d_2^0 d_3^0} \text{Vol} \{x \in \mathbf{R}^{+2} / x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}\} \\ &\sim \frac{3\alpha_c(V) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s) \text{Vol } \mathcal{D}_1 H \log^2 H}{b_1^0 b_2^0 b_3^0 d_2^0 d_3^0}. \end{aligned}$$

En outre, $A_2 = O(H \log H)$. La majoration uniforme s'obtient comme dans les cas précédents. ■

10.5 Formule d'inversion

Comme dans les cas précédents, on démontre le lemme suivant :

Lemme 10.5.1. *Il existe une unique fonction $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que :*

$$(a) \quad \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}.$$

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes :

$$(b) \quad \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \text{ pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B},$$

$$(c) \quad \sum_{n \in \mathbf{N}^F} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

$$(d) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

10.6 Énoncé du résultat

Théorème 10.6.1. *Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant deux points distincts sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$. Soit U le complémentaire dans V des diviseurs exceptionnels. Alors*

$$n_U(H) \sim C_h(V) H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V = 3$.

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème 8.6.1.

11 Cas de l'éclatement en deux points conjugués

11.1 Construction de la hauteur

On note V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un zéro-cycle D de \mathbf{P}_k^2 tel que D s'écrive comme somme de deux points sur \bar{k} une clôture algébrique de k . Il existe donc un élément $a \in \mathcal{O}_k$ tel que $D = P_1 + P_2$ sur $K = k(\sqrt{a})$. On suppose que $a \notin k^{*2}$ et on note $\bar{\cdot}$ le générateur de $\text{Gal}(K/k)$ et α une racine carrée de a dans K . On peut se ramener à

$$P_1 = (0 : 1 : \alpha) \text{ et } P_2 = (0 : 1 : -\alpha).$$

Dans la suite, on fera les hypothèses suivantes :

- $(a, 2) = \mathcal{O}_k$,
- $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_k[\alpha]$,
- $\forall \mathfrak{p} \in M_f, \mathfrak{p} | 2a \Rightarrow a \notin k_{\mathfrak{p}}^2$,
- si $\mathfrak{p} | 2$ alors $k_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_2$ est non ramifiée.

On note S l'ensemble des places ramifiées par l'extension K/k et $S_K = \{\mathfrak{B} \in M_K/\mathfrak{B} | \mathfrak{p}\}$. Soit L le diviseur de V au-dessus de D , L' le diviseur au-dessus de la droite D' définie par $X_0 = 0$ et U leur complémentaire que l'on identifie avec son image dans $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$. Un diviseur canonique est défini par

$$-K = 3\Lambda - L.$$

Sur le corps K , on note

$$Z_0 = X_0, Z_1 = X_2 - \alpha X_1 \text{ et } Z_2 = X_2 + \alpha X_1.$$

Une base de $\Gamma(V_K, \omega_{V_K}^{-1})$ est donc donnée par les monômes en Z_0, Z_1, Z_2 distincts de Z_1^3 et de Z_2^3 . La famille $(s'_i)_{1 \leq i \leq 12}$ définie par les polynômes

$$\begin{aligned} Y'_1 &= X_0^3, & Y'_2 &= X_0^2 Z_1, & Y'_3 &= X_0^2 Z_2, & Y'_4 &= X_0^2 X_1, \\ Y'_5 &= X_0^2 X_2, & Y'_6 &= X_0 Z_1 Z_2, & Y'_7 &= X_0 Z_1 X_1, & Y'_8 &= X_0 Z_1 X_2, \\ Y'_9 &= X_0 Z_2 X_1, & Y'_{10} &= X_0 Z_2 X_2, & Y'_{11} &= X_1 Z_1 Z_2, & Y'_{12} &= X_2 Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

est donc une famille génératrice de $\Gamma(V_K, \omega_{V_K}^{-1})$. Par ailleurs une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ est donnée par les polynômes

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_0^3, & Y_2 &= X_0^2 X_1, & Y_3 &= X_1^2 X_0, & Y_4 &= X_2^2 X_0, \\ Y_5 &= X_0^2 X_2, & Y_6 &= X_1(X_2^2 - aX_1^2), & Y_7 &= X_2(X_2^2 - aX_1^2), & Y_8 &= X_0 X_1 X_2. \end{aligned}$$

Pour tout $\nu \in M_k$, on définit une métrique $\|\cdot\|_\nu$ sur $\omega_{V_\nu}^{-1}$ de la manière suivante : pour tout $x \in V(k_\nu)$ et tout $s \in \Gamma(V_\nu, \omega_{V_\nu}^{-1})$ tel que $s(x) \neq 0$,

$$\|s(x)\|_\nu = \begin{cases} \left(\prod_{\substack{\nu' \in M_K \\ \nu' | \nu}} \sup_{1 \leq i \leq 12} \sqrt{\left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{\nu'}} \right)^{-1} & \text{si } \nu \in M_{f,k}, \\ \prod_{\substack{\nu' \in M_K \\ \nu' | \nu}} \left(\sum_{1 \leq i \leq 12} \left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{\nu'}^{\frac{2}{[k_{\nu'}:k_\nu]}} \right)^{-\frac{[k_{\nu'}:k_\nu]}{4}} & \text{si } k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}, \\ \prod_{\substack{\nu' \in M_K \\ \nu' | \nu}} \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq 12} \left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{\nu'}}^{-1} & \text{si } k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

Cela définit bien une métrique adélique. En effet, comme $\{\mathfrak{p}|2a\} \subset S$, pour tout $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$, on a l'égalité

$$(Y'_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leq i \leq 12) \mathcal{O}_{S_K} = (Y_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leq i \leq 8) \mathcal{O}_{S_K}.$$

En dehors de S la métrique $\|\cdot\|_\nu$ est donc la métrique associée à la base définie par les polynômes Y_i . La hauteur correspondante est alors donnée par

$$\forall P \in V(k), h(P) = \prod_{\nu \in M_k} \|s(x)\|_\nu^{-1}$$

où s est une section de ω_V^{-1} non nulle en x .

11.2 Réécriture de la hauteur

Jusqu'à la section 11.5, on fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$. On se ramène à estimer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(H)$ des $x \in \mathcal{O}_k^3$ tels que :

$$(11.1) \quad (x_0, x_1, x_2) = \mathfrak{a},$$

$$(11.2) \quad h(x) \leq H,$$

$$(11.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2,$$

$$(11.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

Pour tout $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$, on a la relation

$$h(x_0 : x_1 : x_2) = \frac{h_\infty(x_0, x_1, x_2)}{N((Y'_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leq i \leq 12))^{1/2}}$$

avec

$$h_\infty(x_0, x_1, x_2) = \prod_{\nu \in M_\infty} h_\nu(x_0, x_1, x_2)$$

où $h_\nu(x_0, x_1, x_2)$ est défini par

$$\begin{cases} \sqrt{(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)(x_0^2 + |x_2 + \alpha x_1|^2)(x_0^2 + |x_2 - \alpha x_1|^2)} & \text{si } k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} \\ (|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2)(|x_0|^2 + |x_2 + \alpha x_1|^2)(|x_0|^2 + |x_2 - \alpha x_1|^2) & \text{si } k_\nu \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

De plus

$$(Y'_i(x_0, x_1, x_2)_{1 \leq i \leq 12}) = (x_0, x_1, x_2)(x_0, x_2 - \alpha x_1)(x_0, x_2 + \alpha x_1).$$

Nous allons donc faire jouer à l'idéal $\mathfrak{d} = (x_0, x_2 - \alpha x_1)$ le rôle tenu par \mathfrak{d}_1 dans la partie 10. On considère l'ensemble

$$\mathcal{H}_a = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3 / \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) = a \\ x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \end{array} \right. \right\}$$

et \mathcal{H}' l'ensemble des triplets $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)^2$ vérifiant pour tout \mathfrak{P} dans $M_{f,K} - S_K$ la condition suivante

$$(C_{\mathfrak{P}}) \quad \begin{cases} \inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}), \nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{d})) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0 \\ \inf(\nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d})) = 0 \\ \inf(\nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{d})) = 0 \end{cases}$$

et pour tout $\mathfrak{P} \in S_K$,

$$(C_{\mathfrak{P}}) \quad \begin{cases} \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}) \leq 1 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}), \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1)) = 0. \end{cases}$$

On note \mathcal{B} le monoïde $\mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)^2$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$ un élément $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d})$ de \mathcal{B} . Pour tout $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{B}$, on note $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(H)$ le cardinal de l'ensemble des

$$(x_0, x_1, x_2) \in (\mathcal{O}_k - \{0\})^3$$

tels que

$$(11.1') \quad \begin{cases} (x_0) = a \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}) \\ (x_2 + \alpha x_1) = a \mathcal{O}_K \mathfrak{b}_1 \bar{\mathfrak{d}} \end{cases}$$

$$(11.2') \quad h_\infty(x_0, x_1, x_2) \leq HN(a)^3 N(\mathfrak{d})$$

$$(11.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2$$

$$(11.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

Lemme 11.2.1.

$$w \# \mathcal{N}'_a(H) = \sum_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{H}'} n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(H)$$

Démonstration. On considère l'application

$$\tilde{\rho} : \mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)^2$$

définie par $\rho(x) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d})$ avec

$$\begin{cases} \mathfrak{d} = (x_0, x_2 - \alpha x_1)(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K)^{-1} \\ \mathfrak{b}_0 = (x_0)N_{K/k}(\mathfrak{d})^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 = (x_2 + \alpha x_1)\bar{\mathfrak{d}}^{-1}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K)^{-1}. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathcal{H}_a$. Comme dans les cas précédents on montre que si $\mathfrak{P} \in M_{f,K} - S_K$ alors $\tilde{\rho}(x)$ vérifie $(C_{\mathfrak{P}})$. Soit $\mathfrak{P} \in S_K$ et \mathfrak{p} la place induite sur k . Comme par hypothèse $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_k[\alpha]$ et a est premier à 2, deux cas sont possibles: soit $\mathfrak{p}|a$ et alors $\nu_{\mathfrak{p}}(a) = 1$ ou bien $\mathfrak{p} \nmid 2$ et alors une uniformisante pour $K_{\mathfrak{P}}$ est donnée par $\pi = \alpha + u$ avec $u \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^*$.

Supposons que $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}) \geq 2$. Alors $\nu_{\mathfrak{P}}(x_0) \geq \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) + 1$. En outre,

$$\nu_{\mathfrak{P}}(x_2 + \alpha x_1) = \nu_{\mathfrak{P}}(x_2 - \alpha x_1) \geq \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 2.$$

Si $\mathfrak{P} \nmid a$ alors on obtient que $\nu_{\mathfrak{P}}(x_2) \geq \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 2$, donc

$$\nu_{\mathfrak{P}}(x_1) = \nu_{\mathfrak{P}}(\alpha x_1) - 1 \geq \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 1$$

Ceci implique que $\inf(\nu_{\mathfrak{p}}(x_1), \nu_{\mathfrak{p}}(x_2), \nu_{\mathfrak{p}}(x_3)) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(a) + 1$ ce qui est en contradiction avec $x \in \mathcal{H}_a$. Si $\mathfrak{p} \nmid 2$, nous posons $x'_0 = x_0$, $x'_1 = x_1$ et $x'_2 = x_2 - ux_1$ où $u \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$ est défini comme ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned} \nu_{\mathfrak{P}}(x'_2 + \pi x'_1) &= \nu_{\mathfrak{P}}(x'_2 - \pi x'_1), \\ \nu_{\mathfrak{P}}(x_2 - \alpha x_1) &= \nu_{\mathfrak{P}}(x'_2 - \pi x'_1) \end{aligned}$$

et

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(x'_0), \nu_{\mathfrak{p}}(x'_1), \nu_{\mathfrak{p}}(x'_2)).$$

Un raisonnement analogue fournit donc la contradiction recherchée. Le fait que $\inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0\mathcal{O}_K)) = 0$ est immédiat. Si $\inf(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d})) \geq 1$ alors

$$\nu_{\mathfrak{P}}(x_2 + \alpha x_1) \geq \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 2$$

et

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x_0) \geq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) + 1.$$

Ceci contredit également $x \in \mathcal{H}_a$. On note $\rho : \mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}'$ l'application induite.

Par définition de ρ , si $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$ alors x vérifie (11.1'). Il reste à vérifier que si $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) \in \mathcal{H}'$ et si x vérifie (11.1') alors $x \in \mathcal{H}_a$ et $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$. Les conditions $(C_{\mathfrak{P}})$ impliquent que

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{P}} & \nmid \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d})\mathcal{O}_K + \mathfrak{b}_1 \bar{\mathfrak{d}} \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est sordé dans } K/k, \\ \mathfrak{P} & \nmid \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d})\mathcal{O}_K + \mathfrak{b}_1 \bar{\mathfrak{d}} \text{ si } [K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}] = 2 \text{ et } \mathfrak{p} \notin S_K, \\ \mathfrak{P}^2 & \nmid \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d})\mathcal{O}_K + \mathfrak{b}_1 \bar{\mathfrak{d}} \text{ si } \mathfrak{P} \in S_K \end{array}$$

Par conséquent pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$, $\inf_{1 \leq i \leq 3} \nu_{\mathfrak{p}}(x_i) \leq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$. L'égalité se montre comme dans les cas précédents lorsque $\mathfrak{p} \notin S$. Soit maintenant $\mathfrak{p} \in S$ et $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}^k|\mathfrak{a}$ alors $\mathfrak{p}^k|x_0$ et $\mathfrak{P}^{2k}|x_2 + \alpha x_1$. Donc, dans le cas où $\mathfrak{p}|a$

$$\mathfrak{P}^{2k}|x_2 \text{ et } \mathfrak{P}^{2k-1}|x_1$$

Donc $\mathfrak{p}^k|x_2$ et $\mathfrak{p}^k|x_1$. On raisonne de façon similaire avec x_0 , x_1 et $x_1 + ux_2$ si $\mathfrak{p}|2$. Enfin les conditions $(C_{\mathfrak{p}})$ impliquent directement l'égalité $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$.

On a donc démontré $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(H) = \#\rho^{-1}(\{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})\})$. ■

11.3 Estimations dans un cas particulier

Etant donné $\mathfrak{c} = (\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)$, on veut estimer le nombre $m_{\mathfrak{c}}(H)$ des points $(x_0, x_2 + \alpha x_1) \in \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1$ tels que

$$(11.2') \quad h_{\infty}(x) \leq H$$

$$(11.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2$$

$$(11.4) \quad j(x) \in \Delta_h.$$

On note

$$\mathcal{D}_H = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^{3N} / (x_0, x_1, x_2) \in \Delta_h \text{ et } h_{\infty}(x_0, x_1, x_2) \leq H\}.$$

Lemme 11.3.1. *Si $k = \mathbf{Q}$ et $a = -1$ alors pour tout $c_0 \in \mathbf{N}^+$ et tout $c_1 \in \mathbf{Z}[i] - \{0\}$, on a*

$$\frac{H \text{Vol} \mathcal{D}_1}{c_0 N((c_1))} - B_2 H^{2/3} \left(\frac{1}{|c_1| c_0} + \frac{1}{N((c_1))} \right) \leq m_{c_0, c_1}(H) \leq \frac{H \text{Vol} \mathcal{D}_1}{c_0 N((c_1))} + B_2 \frac{H^{2/3}}{|c_1| c_0}$$

et $m_{c_0, c_1}(H)$ est nul si $c_0 > H^{1/3}$ ou $N(c_1) > H^{2/3}$.

Remarque. Dans le cas général, il faudrait pouvoir majorer

$$\left| m_{(c_0, c_1)}(H) - \frac{H \text{Vol} \mathcal{D}_1}{\text{Det}(M)} \right|$$

où M est l'image de $\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1$ dans $\prod_{\nu \in M_{\infty}} k_{\nu}^3$ et

$$\text{Det}(M) = \frac{N(c_0) \times N(c_1) \sqrt{d}^3}{2^{3r_2}}.$$

Démonstration. Dans ce cas particulier, notre choix de la norme pour la place réelle donne

$$h_\infty(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$$

ce qui implique la deuxième assertion.

On note $h_\infty(x_0, x_2 + ix_1) = h_\infty(x_0, x_1, x_2)$. On a alors les majorations :

$$\begin{aligned} & m_{(c_0, c_1)}(H) \\ &= 8\# \left\{ (n_0, n_1, n_2) \in \mathbf{N}^3 \left/ \begin{array}{l} h_\infty(n_0 c_0, n_2 c_1 + i n_1 c_1) \leq H \\ n_0 \neq 0 \\ n_2 \neq 0 \end{array} \right. \right\} \\ &\leq \frac{8}{c_0 N((c_1))} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+3} / h_\infty \left(c_0 E \left(\frac{x_0}{c_0} \right) + c_0, c_1 E \left(\frac{x_2}{|c_1|} \right) + i c_1 E \left(\frac{x_1}{|c_1|} \right) + (1+i)c_1 \right) \leq H \right\} \\ &\quad + 8\# \{ (n_0, n_1) \in \mathbf{N}^{+2} / h_\infty(n_0 c_0, n_1 c_1) \leq H \} \\ &\leq \frac{\text{Vol} \mathcal{D}_H}{c_0 N((c_1))} + B_2 \frac{H^{2/3}}{|c_1| c_0}. \end{aligned}$$

La minoration se montre comme dans les cas précédents. ■

11.4 Sommation sur les idéaux

Comme précédemment, on définit (b) et $P_b^a(H)$.

Lemme 11.4.1. Soit $(b_0^0, b_1^0, d^0) \in \mathcal{B}$, soient $c_0^0 = \text{ab}_0^0 N_{K/k}(d^0)$ et $c_1^0 = \text{ab}_1^0 d^0$.

$$P_{(b^0, d^0)}(H) = \sum_{\mathfrak{v} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)} m_{(c_0^0 N_{K/k}(\mathfrak{v}), c_1^0 \mathfrak{v})}(HN(\mathfrak{a}^3)N(d^0 \mathfrak{v})).$$

Lemme 11.4.2. Si $k = \mathbf{Q}$ et $a = -1$ alors on a l'équivalence

$$P_{(b^0, d^0)}(H) \sim C'' \frac{H \log H}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)}$$

où

$$C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol} \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)(s-1)$$

et, pour $H > 1$, la majoration

$$P_{(b^0, d^0)}(H) \leq B_3 \frac{H(\log H + B_4)}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)}$$

où B_3 et B_4 sont des constantes indépendantes de H , de b^0 et de d^0 .

Remarque. Si le lemme 11.3.1 se généralisait au cas général, on obtiendrait un lemme analogue avec

$$C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol} \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_K(s).$$

Démonstration. Comme dans la partie 10.4, on décompose la somme en deux facteurs $P_b(H) = A_1 + A_2$.

- Nous commençons par estimer A_1

$$A_1 = \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)} \sum_{\substack{\mathfrak{o} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(i)}) \\ N(\mathfrak{o}) \leq H^{1/3} N(\mathfrak{o})^{1/3}}} \frac{1}{N(\mathfrak{o})}.$$

Par le théorème d'Hardy-Littlewood-Karamata (cf. [Te], théorème II.7.8),

$$A_1 \sim \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{H}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)} \left(\frac{\log H}{2} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) \right).$$

- Nous allons maintenant majorer A_2 .

$$|A_2| \leq B_2 H^{2/3} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leq H^{1/2}} \frac{N(\mathfrak{d})^{2/3}}{N(\mathfrak{d})}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leq H^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})^{1/3}} &\leq 1 + \int_{\tau \leq H^{1/4}} \frac{1}{r^{2/3}} r \, dr \, d\theta \\ &\leq 1 + \frac{3}{2} \pi H^{1/3} \end{aligned}$$

- Majorons maintenant $P_{(b^0, d^0)}$ de manière uniforme.

$$m_{c_0, c_1}(H) \leq (\text{Vol} \mathcal{D}_1 + B_2) \frac{H}{c_0 N(c_1)}.$$

Par conséquent,

$$P_{(b^0, d^0)}(H) \leq B_5 H \frac{1}{c_0^0 N(c_1^0)} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leq H^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})}.$$

Or il existe des constantes B_6 et B_7 telles que

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leq H^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \leq B_6 \log H + B_7. \quad \blacksquare$$

Lemme 11.4.3.

$$\zeta_{K, S_K}(s) = \frac{L_S(s, \text{Pic } \overline{V})}{\zeta_{k, S}(s)}.$$

Démonstration. Si \mathfrak{p} est scindé par K , alors

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^2} \\ &= L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right). \end{aligned}$$

Sinon

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{2s}}\right)} = L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right). \quad \blacksquare$$

Lemme 11.4.4.

$$\alpha_c(V) = \frac{1}{6}.$$

Démonstration. $\text{Pic } V$ a pour base $[\Lambda], [L]$. Le domaine

$$\left\{ x \in \text{Pic } V^{\vee} \otimes \mathbf{R} / \left\{ \begin{array}{l} \forall C \text{ effectif } x([C]) > 0 \\ x(\omega_V^{-1}) = 1 \end{array} \right. \right\}$$

a donc pour équation

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \\ 3x - y = 1. \end{array} \right.$$

Par conséquent

$$\theta_{\omega_V^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V) \cap \mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1)) = \frac{1}{6}. \quad \blacksquare$$

On obtient donc le lemme suivant

Lemme 11.4.5.

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{h\sqrt{d^2}} \prod_{\mathfrak{p} \in S} \zeta_{k,\mathfrak{p}}(1) \prod_{\mathfrak{p} \in S_K} \zeta_{K,\mathfrak{p}}(1) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 L_S(s, \text{Pic } \overline{V}) \prod_{\nu \in M_{\infty}} \omega_{\nu}(V_{\nu}).$$

11.5 Formule d'inversion

On utilise des notations $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$, $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ et $\beta(\mathfrak{b})$ analogues à celles de la partie 8.5. Si $\mathfrak{p} \in M_f$, on note

$$\mathcal{B}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} / \nu_{\mathfrak{p}'}(\mathfrak{b}) = 0 \text{ si } \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}\}.$$

Lemme 11.5.1. *Il existe une unique fonction $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que*

$$(a) \quad \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}.$$

Cette fonction vérifie en outre

$$(b) \quad \text{Pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \quad \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}),$$

$$(c) \quad \text{Si } \mathfrak{p} \notin S, \quad \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b}) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

(d) Si $\mathfrak{p} \in S$, on note $\mathfrak{P} \in S_K$ l'idéal au-dessus de \mathfrak{p} ,

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})\zeta_{K,\mathfrak{P}}(1)\zeta_{k,\mathfrak{p}}(1) = \omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}),$$

(e) $\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})| < +\infty$.

Démonstration.

- Les assertions (a) et (b) se démontrent comme dans la partie 8.5.
- Démontrons (c) en distinguant les cas où \mathfrak{p} est scindé et le cas où il ne l'est pas. Si \mathfrak{p} est scindé, soient \mathfrak{P}_1 et \mathfrak{P}_2 les idéaux au-dessus de \mathfrak{p} . Si $n \in \mathbf{N}^3$, on note

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}_1^{n_2} \mathfrak{P}_2^{n_3}, \mathfrak{P}_1^{n_4} \mathfrak{P}_2^{n_5})$$

la fonction $n \mapsto \mu(\mathfrak{p}^n)$ est la même que celle qui apparaît dans le cas scindé. Dans ce cas (c) résulte donc de l'assertion (c) du lemme 10.5.1.

Dans le cas contraire, on note \mathfrak{P} l'idéal au-dessus de \mathfrak{p} et pour tout $n \in \mathbf{N}^3$

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathfrak{P}^{n_3}).$$

L'entier $\mu(\mathfrak{p}^n)$ est nul si un des n_i est supérieur ou égal à 2. En outre

$$\begin{aligned} \mu(0, 0, 0) &= 1, & \mu(0, 0, 1) &= -1, \\ \mu(1, 1, 0) &= -1, & \mu(1, 1, 1) &= 1 \end{aligned}$$

et μ est nul pour les autres valeurs de n . En définitive,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{N}^3} \beta(\mathfrak{p}^n) \mu(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^3} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^5} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \end{aligned}$$

Mais

$$\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic}(\overline{V}))^{-1}$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = d_{\mathfrak{p}}(V).$$

- Démontrons l'assertion (d). Dans ce cas \mathfrak{p} est ramifié dans l'extension K/k . Soit \mathfrak{P} l'idéal au-dessus de \mathfrak{p} . On note μ l'application $\mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par

$$\mu(n) = \mu(\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathfrak{P}^{n_3}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mu(0, 0, 0) &= 1, & \mu(0, 0, 2) &= -1, & \mu(0, 1, 1) &= -1 \\ \mu(1, 1, 0) &= -1, & \mu(1, 1, 1) &= 1, & \mu(0, 1, 2) &= 1.\end{aligned}$$

et les autres valeurs de μ sont nulles. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbf{N}^3} \beta(\mathfrak{p}^n) \mu(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{3}{N(\mathfrak{p})^2} + \frac{2}{N(\mathfrak{p})^3} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}\right)\end{aligned}$$

et le terme de gauche de l'assertion (d) vaut $1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}$. Le terme de droite est obtenu de la manière suivante

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) = \int_{k_{\mathfrak{p}} \times k_{\mathfrak{p}}} N_{k_{\mathfrak{p}}}((1, x_1, x_2)) N_{K_{\mathfrak{p}}}((1, x_2 + \alpha x_1)) dx_1 dx_2.$$

Or une uniformisante pour $K_{\mathfrak{p}}$ s'écrit $\pi = \alpha + u$ avec $u \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^* \cup \{0\}$. On se ramène donc à

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) = \int_{k_{\mathfrak{p}} \times k_{\mathfrak{p}}} N_{k_{\mathfrak{p}}}((1, x_1, x_2)) N_{K_{\mathfrak{p}}}((1, x_2 + \pi x_1)) dx_1 dx_2.$$

Soit $P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})$ et $(\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$ des coordonnées homogènes pour le point P . L'entier $N_{K_{\mathfrak{p}}}(x_0, x_2 + \pi x_1)$ est indépendant des relevés choisis dans $k_{\mathfrak{p}}$. On le note $\phi(P)$. On obtient

$$\begin{aligned}\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) &= \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \sum_{P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})} \phi(P) \\ &= \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \sum_{\substack{P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \\ P \neq (0:1:0)}} 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} N(\mathfrak{p}) \\ &= 1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}.\end{aligned}$$

- L'assertion (e) se démontre comme dans les cas précédents. ■

11.6 Énoncé du résultat

Comme dans les cas précédents, on obtient :

Théorème 11.6.1. *Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points conjugués $(0 : 1 : i)$ et $(0 : 1 : -i)$ sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$. Soit U le complémentaire dans V des diviseurs exceptionnels. Alors*

$$n_v(H) \sim C_h(V) H \log^{t-1} H \text{ quand } H \rightarrow +\infty$$

où $t = \text{rg Pic } V = 2$.

Bibliographie

- [Arti] Artin, E.: Über eine neue Art von L -Reihen. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, **3**, 89–108 (1923)
- [B-M] Batyrev, V.V., Manin, Y.I.: Sur le nombre de points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. Math. Ann. **286**, 27–43 (1990)
- [Bi] Birch, B.J.: Forms in many variables. Proc. Roy. Soc. Lond. **265A** 245–263, (1962)
- [Bl] Bloch, S.: A note on height pairings, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. Invent. Math. **58**, 65–76 (1980)
- [Borel] Borel, A.: Linear algebraic groups. (Second enlarged edition) Graduate Texts in Mathematics vol. 126 Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1991
- [B,T] Borel, A., Tits, J.: Compléments à l'article : « groupes réductifs ». Publ. Math. I.H.E.S. **41** 253–276 (1972)
- [Boro] Borovoi, M.V.: On weak approximation in homogeneous spaces of simply connected algebraic groups. Preprint 89-86, Max-Planck-Institut für Mathematik, (1989)
- [Bki] Bourbaki N.: Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4 à 6. Paris: Masson 1981
- [Car] Cartier, P.: Representations of p -adic groups: a survey. In Borel, A., Casselman, W. (ed) Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 33, Part 1 (pp. 111–155) Providence: AMS 1979
- [Cas] Casselman, W.: The unramified principal series of p -adic groups I. The spherical function. Compositio Math. **40** Fasc. 3, 387–406 (1980)
- [C-T,S] Colliot-Thélène, J.-L., Sansuc J.-J.: La descente sur les variétés rationnelles, II. Duke Math. J. **54**, 375–492 (1987)
- [De] Deligne, P.: La conjecture de Weil I. Publ. Math. I.H.E.S. **43** 273–307 (1973)
- [F,M,T] Franke, J., Manin, Y.I., Tschinkel, Y.: Rational points of bounded height on Fano varieties. Invent. Math. **95**, 421–435 (1989)
- [Fu] Fulton, W.: Intersection theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. folge, Band 2. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1984
- [SGA2] Grothendieck, A.: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. Amsterdam: North Holland 1968

- [Ha] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol. 52. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977
- [Lac] Lachaud, G.: Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring. *Enseign. Math. (2)* **28**, 139–169 (1982)
- [Lan] Langlands, R.P.: On the functional equations satisfied by Eisenstein series. *Lecture notes in math.*, vol. 544. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976
- [Mac] Macdonald, I. G.: Spherical functions on a group of p -adic type. *Publications of the Ramanujan Institute n° 2* (1971)
- [Man] Manin Y.I.: Notes on the arithmetic of Fano threefolds. *Compositio Math.* **85**, 37–55 (1993)
- [Mi] Milne, J.S.: Étale cohomology. Princeton Math. Series 33, Princeton University Press 1980
- [Ro] Rosenlicht, M.: Toroidal algebraic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** 984–988 (1961)
- [Sa] Sansuc, J.-J.: Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.* **327**, 12–80 (1981)
- [Sc] Schanuel, S.H.: Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. Fr.* **107** 433–449 (1979)
- [Se1] Serre, J.-P.: Corps locaux. *Actualités scientifiques et industrielles 1296*. Paris: Hermann 1968
- [Se2] Serre, J.-P.: Lectures on the Mordell-Weil theorem. *Aspects of Mathematics*, vol. E15. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1990
- [Se3] Serre, J.-P.: Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d’après P. Deligne), *Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n° 446*
- [Si] Silverman, J.H.: The theory of height functions. In Cornell, G., Silverman, J.H. (ed) *Arithmetic geometry* (pp. 151–166) Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1986
- [S-D] Swinnerton-Dyer, P.: Counting rational points on cubic surfaces. Preprint (1992)
- [Te] Tenenbaum G.: Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. *Vandœuvre les Nancy: Institut Elie Cartan* 1990
- [Th] Thunder, J.L.: Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties. *Compositio Math.* **88** 155–186 (1993)

- [Ti] Tits, J.: Reductive groups over local fields. In Borel, A., Casselman, W. (ed.) Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 33, Part 1 (pp. 29–69) Providence: AMS 1979
- [We] Weil, A.: Adeles and algebraic groups. Progress in Mathematics Vol. 23 Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1982