LA HAUTEUR D'UNE SUITE DE POINTS DANS $\mathbb{C}_p^k$ ET L'INTERPOLATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE PLUSIEURS VARIABLES

Khoai HA HUY

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Str. 26
5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

Institute of Mathematics
P.O. Box 631 Bo Ho
10 000 Hanoi
Vietnam

MPI/90-65

LA HAUTEUR D'UNE SUITE DE POINTS DANS $\mathbb{C}_p^k$ ET L'INTERPOLATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE PLUSIEURS VARIABLES

Khoai HA HUY

Résumé. Nous définissons la notion de hauteur d'une suite discrète de points dans l'espace $\mathbb{C}_p^k$ et donnons une caractérisation des suites d'interpolation d'une fonction holomorphe en termes de hauteur

Heights for sequences of points in $\mathbb{C}_p^k$ and Interpolation of holomorphic functions of several variables.

Abstract. We define the notion of heights of discrete sequences of points in $\mathbb{C}_p^k$ and give a characterization of interpolating sequences of holomorphic functions in terms of heights.

0. Introduction. Dans cette note nous définissons la notion de hauteur d'une suite discrète de points dans l'espace $\mathbb{C}_p^k$ et utilisons cette notion pour l'étude de l'interpolation des fonctions holomorphes p–adiques de plusieurs variables. Le problème de l'interpolation des fonctions p–adiques de plusieurs variables a été considéré pour la première fois par Y. Amice dans [1]. Les resultats de cette note sont differents de ceux de [1] dans deux aspects. Premièrement, dans [1] l'interpolation est faite sur des suites appelées "très bien répartie". Ce sont en effet des produits de suites des points dans $\mathbb{Z}_p$ (elles sont denses dans $\mathbb{Z}_p^k$). Ici nous travaillons avec des suites discrètes de points dans $\mathbb{C}_p^k$ très générales. Deuxièmement, les fonctions dans [1] sont continuées et bornées, ici nous considérons des

fonctions holomorphes non–necessèrement bornées.

§ 1. La hauteur.

Soient p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p–adiques et $\mathbb{C}_p$ la complétion de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. La valeur absolue de $\mathbb{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Nous utilisons la notation $v(z)$ pour la valuation additive de $\mathbb{C}_p$. Soit D_1 le disque unité dans $\mathbb{C}_p$:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}_p, |z| < 1\} ,$$

et soit $D = D_1 \times \ldots \times D_1$ le polydisque unité dans $\mathbb{C}_p^k$. Considérons une suite de points dans D :

$$u = \{u^s\} = \{(u_1^s,\ldots,u_k^s)\} , \ s = 0,1,2,\ldots \ u_j^s \in D_1 , \ j = 1,\ldots,k \} .$$

On notera $v(u^s) = (v(u_1^s),\ldots,v(u_k^s)) \in \mathbb{R}_+^k$. Pour chaque $t > 0$ nous posons:

$$N_j(t) = \#\{u^s \in u, v(u_j^s) \geq t, j = 1,\ldots,k\}$$

Dans ce qui suit on considère seulement les suites u telles que pour tout $t > 0$ on a

$$N_j(t) < \infty .$$

Alors la suite u est discrète et on peut supposer que pour chaque s ,

$$v(u_j^{s+1}) \leq v(u_j^s)\ ,\ \ j = 1,\dots,k\ .$$

Pour chaque $(t_1,\dots,t_k) \in \mathbb{R}_+^k$ nous posons:

$$n_i^+(t_1,\dots,t_k) = \#\{u^s \in u,\ v(u^s) = (t_1,\dots,T_i,\dots,t_k),\ T_i > t_i\}$$

$$n_i^-(t_1,\dots,t_k) = \#\{u^s \in u,\ v(u^s) = (t_1,\dots,T_i,\dots,t_k),\ T_i \geq t_i\}$$

$$h_i^{\pm}(t_1,\dots,t_k) = n_i^{\pm}(t_1,\dots,t_k)t_i$$

$$h_i(t_1,\dots,t_k) = h_i^-(t_1,\dots,t_k) - h_i^+(t_1,\dots,t_k)$$

$$\begin{aligned}\delta_i^u(t_1,\dots,t_k) = {} & h_i^-(t_1,\dots,t_{i-1},\ T_i,\dots,T_k) - \\ & - h_i^+(t_1,\dots,t_i,\ T_{i+1},\dots,T_k) + \\ & + \sum_{\ell_i > t_i} h_i(t_1,\dots,t_{i-1},\ell_i,T_{i+1},\dots,T_k)\ ,\end{aligned}$$

où $(T_1,\dots,T_k) \in \mathbb{R}_+^k$ est choisi de telle sorte que pour tous $j = 1,\dots,k$ on a $N_j(T_j) = 0$.

<u>Remarque</u>. 1) La somme dans la formule définissant δ_i^u est une somme finie, car $h_i(t_1,\dots,\ell_i,\dots,T_k) \neq 0$ si et seulement s'il existe $u^s \in u$ tel que $v(u^s) = (t_1,\dots,\ell_i,\dots,T_k)$.

2) $\delta_i^u(t_1,\dots,t_k)$ ne dépend pas du choix de point $(T_1,\dots,T_k)$.

Définition 1.1. La hauteur de la suite u est définie par

$$H_u(t_1,\dots,t_k) = \sum_{i=1}^{k} \delta_i^u(t_1,\dots,t_k) \ .$$

Proposition 1.2. 1) Le graphe de la hauteur H_u est le bord d'un polyèdre convexe dans $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}$.

2) Si l'on notera par H le polyèdre $(t_1,\dots,t_k,H_u(t_1,\dots,t_k))$, alors l'ensemble $\{v(u^s),\ u^s \in u\}$ est contenu dans les côtés $\Delta(H)$ du polyèdre H .

La proposition 1.2 est démontrée en utilisant les propriétés géométrique de la hauteur des fonctions holomorphes p–adiques (voir [5]). Notons que $H_u(t_1,\dots,t_k)$ est la hauteur d'une fonction holomorphe dans D dont le développement en séries des $z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k}$ ne contient que les termes avec $n_i = n_i^{\pm}(t_1,\dots,t_k)$ pour certain $(t_1,\dots,t_k)$.

§ 2. Interpolation.

Dans ce qui suit nous ne considérons que les suite u telles que

$$\lim_{|t|\to 0} H_u(t_1,\dots,t_k) = -\infty \ ,$$

où $|t| = \max_{1\leq i\leq k} t_i$, c'est–à–dire que les fonctions holomorphes correspondantes sont nonbornées.

Définition 2.1. On dit que la fonction $f(z_1,\dots,z_k)$ est de classe $o(u)$ si la condition suivante est réalisée:

$$\lim_{|t| \to 0} \{H_f(t_1,\dots,t_k) - H_u(t_1,\dots,t_k)\} = \infty \ ,$$

où $H_f(t_1,\dots,t_k)$ est la hauteur de la fonction $f(z_1,\dots,z_k)$ (voir [4]).

Théorème 2.2. Soient $f_1(z_1,\dots,z_k)$ et $f_2(z_1,\dots,z_k)$ deux fonctions holomorphes de classe $o(u)$. Alors on a $f_1(z_1,\dots,z_k) \equiv f_2(z_1,\dots,z_k)$ si $f_1 = f_2$ aux points de la suite u.

En effet, on pose $f = f_1 - f_2$. Si la fonction f n'est pas nulle identiquement, alors on a $f|_u = 0$ et les points de la suite u sont dans $\Delta(H_f)$. Mais on a donc $u \subset \Delta(H_f) \cap \Delta(H_u)$, ceci est contraire à la condition $f \in o(u)$.

Définition 2.3. Les polynômes $\{P_n(z_1,\dots,z_k)\}$ sont appelés les polynômes d'interpolation de la fonction $f(z_1,\dots,z_k)$ sur la suite u si les conditions suivantes sont réalisées:

1) $\deg P_n \leq n$
2) $P_n(u^s) = f(u^s)$, $s = 0,1,\dots,kn$.

Notons que la suite u est supposée injective, dans le cas de suites non–injectives il faut des modifications mineures.

Définitions 2.4. Une suite u est appelée la suite d'interpolation de la fonction $f(z_1,\dots,z_k)$ si

$$\lim_{n \to \infty} \{P_n(z_1,\dots,z_n) - f(z_1,\dots,z_n)\} = 0$$

uniformement pour $\{(z_1,\ldots,z_k), v(z_j) \geq t_j > 0, j = 1,\ldots,k\}$.

Théorème 2.5. La suite u est une suite d'interpolation de la fonction $f(z_1,\ldots,z_k)$ si et seulement si $f \in o(u)$.

La démonstration du Théorème 2.5 suit un plan similaire à celle du cas des fonctions holomorphes p–adiques d'une variable (voir [2], [3]). Les constructions de la hauteur des fonctions holomorphes de plusieurs variables et des suites et la formule de Poisson–Jensen dans le cas de dimension haute (voir [4], [5]) jouent ici le rôle clé.

L'auteur remercie le Max–Planck–Institut für Mathematik à Bonn pour le support financier et le Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique á Paris, en particulier, les professeurs Y. Amice, D. Barsky, G. Christol, pour hospitalité et plusieurs discussions.

REFERENCES

[1] Y. Amice. Interpolation p–adique. Bull. Soc. Math. France, 92, 117–180 (1964).

[2] Ha Huy Khoai. Sur l'interpolation p–adique. Mat. Zametki, 1979, vol 1. (en russe).

[3] Ha Huy Khoai. Heights for p–adic meromorphic functions and Value distribution Theory. Max–Planck–Institut für Mathematik Bonn, MPI 89–76, 1989.

[4] Ha Huy Khoai. Heights for p–adic holomorphic functions of several variables. Max–Planck–Institut für Mathematik, Bonn, MPI 89–83, 1989.

[5] Ha Huy Khoai. La hauteur d'une fonction holomorphe p–adique de plusieurs variables. C.R.A.S. Paris (à paraitre).

Max–Planck–Institut für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26, 5300 Bonn 3, FRG
et
Institute of Mathematics
P.O. Box 631 Bo Ho, 10000 Hanoi, Vietnam