

INVARIANTS POLAIRES
DES COURBES PLANES REDUITES.

by

Lê-Văn-Thành^(*)

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

Institut of Mathematics
P.O. Box 631-10.000
Hanoi

Vietnam

MPI/88-28

Lê văn Thành

Le but de cet article était le calcul, en termes de topologie, pour le cas général d'un germe de courbe plane réduite, des invariants d'équisingularité $\left\{ \frac{e_i}{m_i} \right\}$ introduits par Teissier [T] et dont les $\left[\frac{e_i}{m_i} + 1 \right]^{-1}$, dites les quotients polaires dans [L]. Le résultat contient un connu de Merle dans le cas particulier de courbe plane irréductible [M].

Ce travail été fait en durant mon séjour au Bonn invité par le Max-Planck-Institut für Mathematik. Je lui remercie beaucoup pour sa hospitalité. Mes remerciements vont aussi au E. Brieskorn et J. Steenbrink pour les fructueuses discussions, à L.D. Tráng pour son encouragement.

§ 1. Rappels et l'énoncé de résultat principal.

1.1. Soit $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ un germe de fonction holomorphe sans facteurs carrés. Alors la courbe polaire de f relative à une direction ℓ du plan (de coordonnées homogènes (α, β) dans \mathbb{P}^1) est définie par $\Gamma_{\ell}(f) =: \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2, \alpha \frac{\partial f}{\partial x} - \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\}$. (Dans le cas général de f , elle est définie par $\alpha \frac{\partial f_{red}}{\partial x} - \beta \frac{\partial f_{red}}{\partial y} = 0$ où f_{red} est la partie réduite de f). Si ℓ assez général alors $\Gamma_{\ell}(f)$ est réduite et elle a un type topologique bien défini en 0 qui ne depend que de la classe d'isomorphismes analytique de l'anneau $\mathbb{C}\{x, y\}/(f)$ et on l'appelle la courbe polaire (général) de f . De plus, dans notre cas où f réduite $\Gamma_{\ell}(f)$ coincide au lieu critique $C(\Phi)$ du germe d'application $\Phi = (\ell, f) : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, $\Phi(x, y) = (u, v) = (\ell(x, y), f(x, y))$, et donc, $\Delta =: \Phi(\Gamma_{\ell}(f))$, dite le discriminant polaire de f , coincide au discriminant $\Delta(\Phi) =: \Phi(C(\Phi))$ de l'application Φ (cf. [L]).

1.2. Dans tous les cas, le discriminant polaire Δ de f n'a que une seule tangente $\{v = 0\}$ et donc, chaque leur composante Δ_i ($i = 1, \dots, g$) a un développement de Puiseux en 0 de la même forme:

$$u = a_i v^{r_i} + \dots \quad (1-2-1)$$

où $a_i \neq 0$ et $r_i = \frac{\nu_0(\Delta_i)}{(\Delta_i \cdot v=0)_0} < 1$, $i = 1, \dots, g$. ($\nu_0(\Delta_i)$ la multiplicité de Δ_i ; $(**)_0$ le nombre d'intersection en 0; cf. [L]).

On appelle quotients polaires de f en 0 les rationnels distincts dans l'ensemble $\{r_1, \dots, r_g\}$. Par la "formule de projection" (cf. [F]) on a :

$$(\Delta_i \cdot v=0)_0 = (\Gamma_i \cdot f=0)_0 \text{ où } \Gamma_i = \Phi^{-1}(\Delta_i)$$

donc $r_i = \frac{\nu_0(\Gamma_i)}{(\Gamma_i \cdot f=0)_0}$. D'autre part, pour chaque Γ_i , le rapport e_i/m_i qui lui est associé dans [T] est égal à $\frac{(\Gamma_i \cdot f=0)_0}{\nu_0(\Gamma_i)} - 1 = r_i^{-1} - 1$. C'est à dire que les inverse des

quotients polaires de f sont shift par un des invariants polaires $\left\{ \frac{e_i}{m_i} \right\}$ définits par [T]

(cf. aussi [M]):

$$\frac{1}{r_i} = \frac{e_i}{m_i} + 1 \quad (1-2-2)$$

On note \mathcal{P} l'ensemble des inverses de quotients polaires.

Les invariants polaires ont le rôle important dans la theorie d'équisingularité en général (cf. [T]). En particulièrement, avec les quotients polaires, on peut calculer la forme d'intersection de f en terme de celle des intersections planes générales (cf. [G]) et construire une "décomposition polaire de la monodromie" qui est une clé de retrouver la

"décomposition de Waldhausen" et la "Structure de Seifert" de la courbe donnée (cf. [L], [LMW]). Ils sont aussi utilisés pour déterminer la structure de Hodge mixte (cf. [SZ]) et donc le Specre de la singularité donnée (cf. [LS]). Alors il est très intéressant d'avoir une formule des quotients polaires en termes de topologie classique. Ce problème a été résolu par Merle [M] dans le cas irréductible et sera résolu ici dans le cas général. Pour énoncer le résultat principal nous appellons les suivants:

1.3. Soient $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, C_j la j -ème branche de la courbe donnée $C =: \{f = 0\}$, avec ses caractéristiques de Puiseux $\{\nu_0^j, \beta_1^j, \dots, \beta_{g_j}^j\}$ (ν_0^j est la multiplicité de C_j). On note $((m_{\ell}^j, n_{\ell}^j))$ ($\ell = 1, 2, \dots, g_j$) les paires de Puiseux de C_j définits par:

$$m_{\ell}^j, n_{\ell}^j \in \mathbb{N}, (m_{\ell}^j, n_{\ell}^j) = 1, m_1^j/n_1^j = \beta_1^j/\nu_0^j$$

et $m_{\ell}^j/n_1^j \dots n_{\ell}^j = (\beta_{\ell}^j - \beta_{\ell-1}^j)/\nu_0^j$.

Soit $\{(\nu_0^j, \nu_1^j, \dots, \nu_N^j)\}_{j=1}^p$ le système des suites de multiplicité de C (un système des multiplicités des points voisins infinitesimals des C_j dans le quel on a regroupé les nombres correspondants au même point voisin infinitesimal). Par exemple, le système des suites de multiplicité de $C = \{(x^5 - y^8)(x^8 - y^{11}) = 0\}$ est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \boxed{5} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & * \\ \boxed{8} & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & * \end{array} \right\}$$

Remarquons que (cf. [BK]) la donnée du système des suites de multiplicité est équivalante à celle de topologie de C et définie par un processus des algorithmes d'Euclide sur les caractéristiques de Puiseux et par un théorème de Noether dit que si $(\sigma_{ij} + 1)$ est le nombre des points voisins infinitesimals communs des C_i et C_j alors

$$\sum_{\ell=0}^{\sigma_{ij}} \nu_{\ell}^i \nu_{\ell}^j = (C_i \cdot C_j).$$

Soit $(\nu_0^j, \nu_1^j, \dots, \nu_N^j) =: (\nu_0^j; \nu_1^j, \dots, \nu_{k(j,1)}^j, \nu_{k(j+1)+1}^j, \dots, \nu_{k(j,2)}^j, \dots, \nu_{k(j,g_j)}^j, 1, \dots, 1, *)$, où $(\nu_1^j, \dots, \nu_{k(j,1)}^j)$ (resp. $(\nu_{k(j,\ell-1)+1}^j, \dots, \nu_{k(j,\ell)}^j)$) se produit de l'algorithme d'Euclide du β_1^j (resp. $(\beta_{\ell}^j - \beta_{\ell-1}^j)$) par ν_0^j (resp. $\nu_{k(j,\ell-1)}^j$) et * représentant la transformée stricte de C_j par sa résolution canonique. Pour tout j on peut ajouter à la fin de la j -ème suite de multiplicité un nombre convenable des multiplicités 1 tellement les suites ayants le même long (cf. [BK]). On note:

$$k_{ij} = \max\{0 \cup (\ell : k(i,\ell) = k(j,\ell) \leq \rho_{ij} + 1)\}; \quad (1-3-2)$$

$$\text{Pour } \ell = 1, R_{k(i,1)}^i = \nu_0^i \beta_1^i / \ell_1^{(1)}; \quad (1-3-3)$$

$$M_{k(i,1)}^i = 0, m_{k(i,1)}^i = \sum_{j \neq i} \nu_0^j \min\{\beta_1^i / \ell_1^{(1)}; \beta_1^j / \ell_j^{(1)}\}; \quad (1-3-4)$$

Pour $\ell > 1$:

$$R_{k(i,\ell)}^i = [\beta_1^i \cdot \ell_1^{(0)} + \sum_{s=1}^{\ell-1} (\beta_{s+1}^i - \beta_s^i) \ell_1^{(s)}] / \ell_1^{(\ell)}; \quad (1-3-5)$$

$$m_{k(i,\ell)}^i = \sum_{\substack{j \neq i \\ k(i,\ell-1) \leq \sigma_{ij} + 1}} \left\{ \left[\beta_1^j \ell_j^{(0)} + \sum_{s=1}^{\ell-2} (\beta_{s+1}^j - \beta_s^j) \ell_j^{(s)} \right] / \ell_j^{(\ell)} + \nu_0^j \min \left[(\beta_{\ell}^j - \beta_{\ell-1}^j) \ell_j^{(\ell-1)} / \ell_j^{(\ell)}; (\beta_{\ell}^j - \beta_{\ell-1}^j) \ell_j^{(\ell-1)} / \ell_j^{(\ell)} \right] \right\}; \quad (1-3-6)$$

$$M_{k(i,\ell)}^i = \ell_i^{(\ell-1)} \sum_{\substack{j \neq i \\ k(i,\ell-1) > \sigma_{ij} + 1}} (C_i \cdot C_j) / \ell_i^{(\ell)} \nu_{k(i,\ell-1)-1}^i ;$$

(1-3-7)

où $\ell_j^{(s)} = \text{p.g.c.d}(\nu_0^j, \beta_1^j, \dots, \beta_s^j)$, $\ell_j^{(0)} = \nu_0^j$.

1.4. Théorème:

Si $\{f = 0\}$ n'a pas exactement deux tangentes distinctes en 0 alors le nombre des quotients polaires de f est plus petit ou égal à $\sum_{j=1}^p g_j - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_{ij}$, et ils sont les rationnels distincts de l'ensemble

$$\left\{ r_{k(i,\ell)}^i = n_1^i \dots n_\ell^i / [R_{k(i,\ell)}^i + m_{k(i,\ell)}^i + M_{k(i,\ell)}^i] \right\}_{i=1 \div p, \ell=1 \div g_i}$$

Si $\{f = 0\}$ a justement deux tangents distinctes en 0 alors il convient de rajouter $1/m$, où m est la multiplicité de f en 0, pour obtenir les quotients polaires de f en 0.

1.5. Remarque

Si $\ell = \ell'$, $k(i,\ell) = k(j,\ell')$ et le $k(i,\ell)$ -em point voisin infinitesimal de C_i coïncide à celui de C_j alors $r_{k(i,\ell)}^i = r_{k(j,\ell')}^j$. Mais inversement il n'est pas nécessairement, par exemple $C = \{(x^2 - y^3)(x^3 - y^2) = 0\}$.

§ 2. Démonstration du Théorème principal

2.1. Soient $\pi : Z \rightarrow U$ la résolution canonique du germe f et $E = \pi^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel de π . Il a pour les composantes irréductibles des droites projectives complexes E_i ($i = 1, 2, \dots, N$) qui se coupent normalement. La transformée stricte de f ,

(l'adhérence dans Z de $(f \circ \pi)^{-1}(0) - E$) consiste de p courbes disjointes \tilde{C}_j qui sont lisses et intersectent E en des points réguliers. On associe à $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ un graphe, dit le graphe de résolution de f , comme suivant: pour chaque E_i on associe un point et on lie deux points par un segment s'ils sont voisin, c'est à dire que les E_i correspondantes se coupent; et à chaque \tilde{C}_j on associe un star (*) et le relie au point représentant le E_i que C_j coupe transversalement. On appelle point de rupture du graphe un point représentant un E_i d'où part 3 segments au moins.

En chaque point général de chaque composante E_i de $\pi^{-1}(0)$ la fonction $f \circ \pi$ égale localement ξ^{d_i} si ξ est une coordonnée locale convenable de Z telle que $\xi = 0$ soit une équation locale de E_i . On appelle d_i la multiplicité de f le long de E_i . De même on peut définir la multiplicité m_i le long de E_i d'une forme linéaire assez général ℓ . Alors on a:

2.2. Lemme ([L], Théorème 4-2-2)

Si $\{f = 0\}$ n'a pas exactement deux tangents distinctes en 0, les quotients $\{m_i/d_i\}$ calculés aux points de ruptures du graphe de résolution sont les quotients polaires de f en 0. Si $\{f = 0\}$ a justement deux tangents distinctes en 0, il convient de rajouter $1/m$, où m est la multiplicité de f en 0, pour obtenir les quotients polaires de f en 0.

2.3. Lemme.

Soit $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n$ la composition des éclatements de la résolution canonique π de C . Alors la courbe exceptionnelle E_i de π_i ($i \neq 1$) est une rupture du graphe de résolution de C si et seulement s'il existe une branche C_j telle que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_i$ est un facteur de la résolution canonique de C_j et E_i est une rupture du graphe de résolution de C_j .

Preuve.

La preuve du (2-3) utilise la construction canonique du graphe de résolution que nous appellons ici une sa forme convenable.

Pour chaque composante E de $\pi^{-1}(0)$ on note $i(E)$ le minimal des indexes $i \in (1, 2, \dots, n)$ tel que l'image $\pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_n(E)$ n'est pas un point.

Soit G' (resp. G'') le graphe de résolution de $C' = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{p-1}$ (resp. $C'' = C_p$); ℓ_j , $j \in (1, 2, \dots, p-1)$ (resp. ℓ_p) le nombre minimal des éclatements dans la résolution canonique de C' (resp. C) tel que après lui la transformée stricte de C_j (resp. C_p) est lisse, transverse par une seule courbe exceptionnelle et disjointe de tous les autres de C' ; et enfin, ℓ_p^0 le nombre des éclatements de la résolution canonique de C_p . On note \tilde{G}' (resp. \tilde{G}'') une modification de G' (resp. G'') en ajoutant k_j ponts entre le j -em star et son point voisin, où k_j satisfait $k_j + \ell_j = \sigma_{jp} + 1$, $j \in (1, \dots, p-1)$ et $k_p + \ell_p^0 = \ell_p$. Alors le graphe de résolution G de C est déterminé par \tilde{G}' et \tilde{G}'' comme suivant (cf. [BK] prop. 16 § 8.4):

I/ Les points du G sont les points de \tilde{G}' et les points d'un sous-ensemble $\tilde{G}_1'' \subset \tilde{G}''$ qui représentent les composantes exceptionnelles des éclatements des points voisins infinitésimaux propres de C_p (ne sont pas communs aux autres de C') ou le star de \tilde{G}'' :

$$\tilde{G}_1'' = \{E \in \tilde{G}'' : i(E) \geq 1 + \max_j (\sigma_{jp} + 1) = 1 + \ell_p\} \cup \{*\}$$

II/ Les points voisins dans \tilde{G}_1'' sont voisins aussi dans G .

III/ Si $E_1'' \in \tilde{G}_1''$ et $E_2'' \in \tilde{G}'' - \tilde{G}_1''$ sont voisins dans \tilde{G}'' , alors E_1'' est voisin dans G de tout $E' \in \tilde{G}'$ tel que $i(E') = i(E_2'')$. (Donc E' est identifié à E_2'' dans \tilde{G}'' parce que $i(E_2'') \leq \ell_p$).

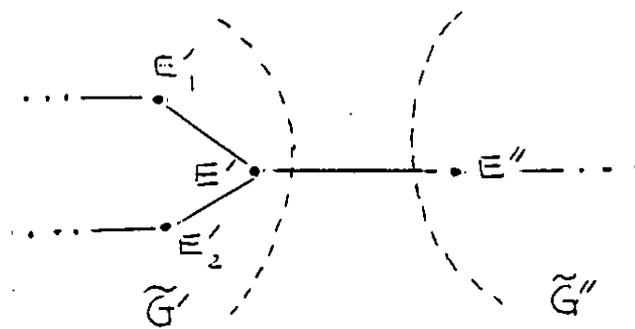
IV/ Les points voisins $E_1', E_2' \in \tilde{G}'$ sont voisins aussi dans G sauf le cas où $i(E_1') < \ell_p$, $i(E_2') = \ell_p$ mais (E_1', E_2') ne sont pas voisins dans \tilde{G}'' .

En supposant $i \neq 1$ et utilisant la construction canonique précédente, on peut supposer que $p = 2$. Tout d'abord, nous remarquons que si E s'apparait comme la composante exceptionnelle de π_i et elle transverse par d composantes autres, alors après l'éclatement π_{i+1} le nombre des composantes intersectés E est plus grand ou égal à d . Donc tous les ruptures de G' et de G'' sont aussi les ruptures de G .

Inversement, il nous reste encore de démontrer que la construction canonique ne donne pas les ruptures nouvelles.

Parce que les modifications $G' \rightarrow \tilde{G}'$, $G'' \rightarrow \tilde{G}''$ ne donnent pas les ruptures nouvelles, il ne faut que regarder la situation unique III/ qu'il peut s'apparaitre la rupture nouvelle.

Soit $E' \in \tilde{G}'$ une rupture du G qui a les voisins dans la situation III/.



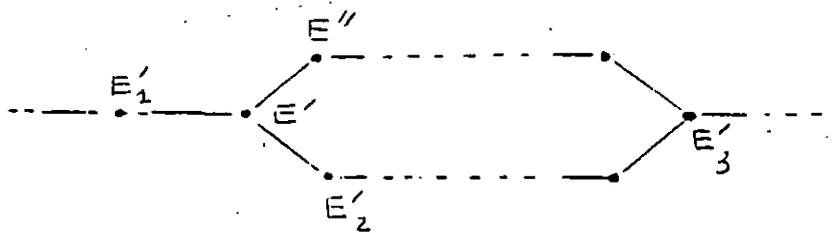
$$E', E_1, E_2 \in \tilde{G}', \quad E'' \in \tilde{G}'', i(E'') \geq \ell_p + 1$$

Il y n'a que deux cas possibles:

- (a) ou bien $i(E'_1) < i(E') < i(E'_2) \leq \ell_p$
- (b) ou bien $i(E'_1) < i(E') \leq \ell_p; i(E'_2) \geq \ell_p + 1$

Par définition de ℓ_p , dans le cas (a) on peut regarder E'_1, E', E'_2 comme les points de \tilde{G}'' , ça veut dire que E' est une rupture de G'' .

Dans le cas (b), E_2' n'est pas un point de \tilde{G}'' . Si E' n'est pas une rupture de \tilde{G}' ou de \tilde{G}'' alors il existe $E_3' \in \tilde{G}'$, $i(E_3') \leq \ell_p$ tel que les éclatements de leur points voisins infinitesimals donnent E'' et E_2' respectivement. Parce que $E'' \notin \tilde{G}'' - G''$ et $E_2' \notin \tilde{G}' - G'$, ils sont les points "canoniques" de G'' et G' respectivement, donc il existe deux chaines des voisins (dans G'' et G' respectivement) qui jointent E'' et E_2' au E_3' .



Alors on a un cycle des voisins dans G , c'est impossible. Le lemme (2-3) est démontré.

2.4. Lemme.

Soit $E_{k(i,\ell)}^i$ une rupture de G , qui est la rupture correspondante à ℓ -em pair de Puiseux $((m_{\ell}^i, n_{\ell}^i))$ de la i -eme branche C_i , ($E_{k(i,\ell)}^i \in G_i$), alors la multiplicité $d_{k(i,\ell)}^i$ de f le long de $E_{k(i,\ell)}^i$ est calculée par:

$$d_{k(i,\ell)}^i = R_{k(i,\ell)}^i + m_{k(i,\ell)}^i + M_{k(i,\ell)}^i$$

où $R_{k(i,\ell)}^i$, $m_{k(i,\ell)}^i$ et $M_{k(i,\ell)}^i$ données par les formules de (1-3-2) à (1-3-7) en termes de topologie de f .

Preuve

Soient $\{f_i = 0\}$ l'équation de i -eme branche C_i et $R_{k(i,\ell)}^i$ la multiplicité de f_i le long de $E_{k(i,\ell)}^i$ dans la résolution canonique de C_i , alors, d'après [Li] (prop. 1.33) on a:

$$R_{k(i,1)}^i = \nu_0^i \beta_1^i / \ell_i^{(1)} \quad (2-4-1)$$

$$R_{k(i,\ell)}^i = [R_{k(i,\ell-1)}^i + (\beta_{\ell}^i - \beta_{\ell-1}^i)] \ell_i^{(\ell-1)} / \ell_i^{(\ell)} \quad (2-4-2)$$

($\ell \geq 2$).

En regardant l'action de la résolution canonique de C_i pour la branche C_j ($j \neq i$) on a: La multiplicité de f_j le long de $E_{k(i,1)}^i$ égale à

$$\nu_0^j \min\{\beta_1^i / \ell_i^{(1)}; \beta_1^j / \ell_j^{(1)}\}$$

donc,

$$\begin{aligned} d_{k(i,1)}^i &= \nu_0^i \beta_1^i / \ell_i^{(1)} + \sum_{j \neq i} \nu_0^j \min\{\beta_1^i / \ell_i^{(1)}; \beta_1^j / \ell_j^{(1)}\} \\ &= R_{k(i,1)}^i + m_{k(i,1)}^i \end{aligned} \quad (2-4-3)$$

Soit $\ell \geq 2$ il y a deux cas possibles sur l'action de la résolution de C_i pour la branche C_j : ou bien $k(i,\ell-1) \leq \sigma_{ij} + 1$ ou bien $k(i,\ell-1) > \sigma_{ij} + 1$.

Dans le cas $k(i,\ell-1) \leq \sigma_{ij} + 1$, les $k(i,\ell-1)$ -ems points voisins infinitesimals de C_i et de C_j se coincident, alors pour obtenir la multiplicité de $(f_i \cdot f_j)$ le long $E_{k(i,\ell)}^i$ il faut rajouter à $R_{k(i,\ell)}^i$ les deux parties: la première donnée par la composante canonique $E_{k(j,\ell-1)}^j$ de C_j et la deuxième donnée par la transformée stricte de C_j dans la résolution de ℓ -em pair de Puiseux $((m_{\ell}^i, n_{\ell}^i))$ de C_i . Analogement à (2-4-2), on peut montrer que, dans ce cas, la partie première est le nombre

$$R_{k(j, \ell-1)}^j \ell_i^{(\ell-1)/\ell} := R_{k(i, \ell)}^j \quad (2-4-4)$$

Et la deuxième est le

$$\min\{(\beta_\ell^i - \beta_{\ell-1}^i) \ell_i^{(\ell-1)/\ell}; (\beta_\ell^j - \beta_{\ell-1}^j) \ell_j^{(\ell-1)/\ell}\}$$

Donc

$$\text{mult}\left[f_i \cdot f_j \Big|_{E_{k(i, \ell)}^i}\right] = R_{k(i, \ell)}^i + R_{k(i, \ell)}^j + \min\{ \quad \}. \quad (2-4-5)$$

(Remarque dans ce cas, $k(i, \ell - 1) \leq \sigma_{ij} + 1$ on a $k(i, \ell - 1) = k(j, \ell - 1)$ mais

$k(i, \ell) \neq k(j, \ell)$ en général. Si $k(i, \ell) = k(j, \ell) \leq \sigma_{ij} + 1$ on a

$R_{k(i, \ell)}^j + \min\{(\beta_\ell^i - \beta_{\ell-1}^i) e_i^{(\ell-1)/\ell}; (\beta_\ell^j - \beta_{\ell-1}^j) e_j^{(\ell-1)/\ell}\}$ égale exactement $R_{k(j, \ell)}^j$, la droite de (2-4-4) n'est que une notation de convention).

Dans le cas $k(i, \ell - 1) > \sigma_{ij} + 1$ les $k(i, \ell - 1)$ -ems points voisins infinitesimals de C_i et de C_j sont distincts, alors la résolution canonique de ℓ -em pair de Puiseux de C_i n'a pas de l'action sur les transformées strictes de C_j . Donc pour obtenir la multiplicité de $(f_i \cdot f_j)$ le long de $E_{k(i, \ell)}^i$, il ne faut que rajouter à $R_{k(i, \ell)}^i$ le nombre

$$\text{mult}(f_j \Big|_{E_{k(i, \ell-1)}^i}) e_i^{(\ell-1)/\ell}$$

D'autre part, soit $\tilde{C}_i^{\ell-1}$ la transformée stricte de C_i par

$H := \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{k(i, \ell-1)}$, alors $\tilde{C}_i^{\ell-1}$ n'intersecte que une seule composante (rupture)

$E_{k(i, \ell-1)}^i$ de $H^{-1}(0)$. On a:

$$\begin{aligned} (C_i \cdot C_j) &= (\alpha_i^{\ell-1} \cdot \sum_{E \in H^{-1}(0)} \text{mult}(f_j | E) E) + (\alpha_i^{\ell-1} \cdot \alpha_j^{\ell-1}) \\ &= \text{mult}(f_j | E_{k(i, \ell-1)}^i) (\alpha_i^{\ell-1} \cdot E_{k(i, \ell-1)}^i) (\alpha_i^{\ell-1} \cdot \alpha_j^{\ell-1}) \end{aligned}$$

Mais $k(i, \ell - 1) > \sigma_{ij} + 1$, d'après l'hypothèse, alors $(\alpha_i^{\ell-1} \cdot \alpha_j^{\ell-1}) = 0$ et donc

$$(C_i \cdot C_j) = \text{mult}(f_j | E_{k(i, \ell-1)}^i) \nu_{k(i, \ell-1)-1}^i, \text{ ou}$$

$$\text{mult}(f_j | E_{k(i, \ell-1)}^i) = (C_i \cdot C_j) / \nu_{k(i, \ell-1)-1}^i.$$

Et donc

$$\text{mult}(f_i f_j | E_{k(i, \ell)}^i) = R_{k(i, \ell)}^i + (C_i \cdot C_j) e_i^{(\ell-1)} / e_i^{(\ell)} \nu_{k(i, \ell-1)-1}^i. \quad (2-4-6)$$

(si $k(i, \ell - 1) > \sigma_{ij} + 1$).

Finalement, en regardant (2-4-5) et (2-4-6) on a:

$$\begin{aligned} d_{k(i, \ell)}^i &= R_{k(i, \ell)}^i + \sum_{\substack{j \neq i \\ k(i, \ell-1) \leq \sigma_{ij} + 1}} \left[R_{k(i, \ell)}^j + \min \left\{ (\beta_{\ell}^i - \beta_{\ell-1}^i) e_i^{(\ell-1)} / e_i^{(\ell)} ; \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\beta_{\ell}^j - \beta_{\ell-1}^j) e_j^{(\ell-1)} / e_j^{(\ell)} \right\} \right] + \sum_{\substack{j \neq i \\ k(i, \ell-1) > \sigma_{ij} + 1}} (C_i \cdot C_j) e_i^{(\ell-1)} / e_i^{(\ell)} \nu_{k(i, \ell-1)-1}^i. \end{aligned}$$

(2-4-7)

où $R_{k(i,\ell)}^i$ et $R_{k(i,\ell)}^j$ données par (2-4-2) et (2-4-4) respectivement:

$$R_{k(i,\ell)}^i = \left[e_i^{(0)} \beta_1^i + \sum_{s=1}^{\ell-1} (\beta_{s+1}^i - \beta_s^i) e_i^{(s)} \right] / e_i^{(\ell)} \quad (2-4-2)'$$

$$R_{k(i,\ell)}^j = \left[e_j^{(0)} \beta_1^j + \sum_{s=1}^{\ell-2} (\beta_{s+1}^j - \beta_s^j) e_j^{(s)} \right] / e_i^{(\ell)} \quad (2-4-4)'$$

La formule (2-4-7) démontre le lemme (2-4).

2.5. Fin de la démonstration du (1-4).

Soient $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ l'entrelacs (link) de f , et $M = \bigcup_{j=1}^g V_j$ la décomposition en la réunion des variétés de Seifert du complémentaire dans S_ε^3 d'un petit voisinage tubulaire ouvert de K (cf [EN] et [LMW]). Une fibre régulière ρ_j de la fibration Seifert de V_j est un noeud dans S_ε^3 . Soient $b(\rho_j)$ et $L(\rho_j, K)$ son "braid index" et son "coefficient d'enlacement avec K " respectivement. On note ([LMW])

$$P_{\text{top}} = \{L(\rho_j, K)/b(\rho_j), j = 1 \div g\}$$

D'après [LMW] (Théorème C), si le cône tangent de f est constitué de deux droites distinctes alors $P_{\text{top}} \cup \{m\} = P$, dans tous les autres cas $P_{\text{top}} = P$.

D'autre part, pour chaque rupture E_j , soit $\{g_j = 0\}$ une germe de courbe à l'origine de \mathbb{C}^2 telle que sa transformée stricte par π est une courbe lisse γ_j dans Z transverse à E_j en un seul point régulier de $\pi^{-1}(0)$, alors par H. Schubert [S] (cf.

[LMW] prop. 1.3.18) P_{top} est égale à l'ensemble des quotients $\{(f = 0 \cdot g_j = 0)/\nu_0(g_j)\}$.

Plus précisément, $L(\rho_j, K) = (f = 0 \cdot g_j = 0)$, $b(\rho_j) = \nu_0(g_j)$.

Remarque que $(\gamma_j \cdot E_j) = 1$, $(\gamma_j \cdot E) = 0 \forall E \in \pi^{-1}(0) \setminus E_j$ on a:

$$\begin{aligned} \text{mult}(f|E_j) &= (\gamma_j \cdot E_j) \text{mult}(f|E_j) \\ &= (\gamma_j \cdot \sum_{E \in \pi^{-1}(0)} \text{mult}(f|E)E) \\ &= (g_j = 0, f = 0). \end{aligned}$$

D'après le lemme (2-3) il existe une branche C_j telle que la rupture donnée de f est une rupture (canonique) de C_j , soit $E_j = E_{k(j,\ell)}^j$.

Soit C_j^ℓ une germe de courbe irréductible à l'origine de \mathbb{C}^2 donnée topologiquement par les nombres suivants comme ses exposants de Puiseux:

$$\begin{aligned} \nu_0(C_j^\ell) &= n_1^j \dots n_\ell^j \\ \beta_1(C_j^\ell) &= \nu_0(C_j^\ell) m_1^j / n_1^j = m_1^j n_2^j \dots n_\ell^j \\ &\dots \\ \beta_\ell(C_j^\ell) &= \nu_0(C_j^\ell) (m_1^j / n_1^j + m_2^j / n_1^j n_2^j + \dots + m_\ell^j / n_1^j \dots n_\ell^j) \\ &= m_1^j n_2^j \dots n_\ell^j + m_2^j n_3^j \dots n_\ell^j + \dots + m_\ell^j \end{aligned}$$

On peut choisir C_j^ℓ telle que son cône tangent coïncide à celui de C_j , donc sa transformée stricte par π est une courbe lisse dans Z , transverse à $E_{k(j,\ell)}^j$ en un seul point régulier de $\pi^{-1}(0)$. Ça veut dire que C_j^ℓ satisfait tous les propriétés de $\{g_j = 0\}$ précédente.

Alors on a:

$$P_{\text{top}} = \{(C \cdot C_j^\ell) / \nu_0(C_j^\ell)\} = \{d_{k(j,\ell)}^j / n_1^j \dots n_\ell^j\} \quad (2-5)$$

Le théorème (1-4) est démontré.

$$r_1 = 1/m = 1/15$$

$$r_2 = n_1^1 / [\nu_0^1 \beta_1^1 / e_1^{(1)} + \nu_0^2 \min(\beta_1^1 / e_1^{(1)}, \beta_1^2 / e_2^{(1)})] = 8/165$$

$$r_3 = n_1^2 / [\nu_0^2 \beta_1^2 / e_2^{(1)} + \nu_0^1 \min(\beta_1^1 / e_1^{(1)}, \beta_1^2 / e_2^{(1)})] = 7/193$$

3.3. Exemple.

$$C_1 = \begin{cases} x = t^{100} \\ y = t^{250} + t^{375} + t^{410} + t^{417} \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} x = t^{100} \\ y = t^{250} + t^{375} + t^{390} + t^{391} \end{cases}$$

$$\nu_0^1 = \nu_0^2 = 100; \beta_1^1 = \beta_1^2 = 250; \beta_2^1 = \beta_2^2 = 375; \beta_3^1 = 410, \beta_4^1 = 417$$

$$\beta_3^2 = 390, \beta_4^2 = 391; (C_1 \cdot C_2) = 31625$$

$$(m_{1,n_1}^1) = (m_{1,n_1}^2) = (m_{2,n_2}^1) = (m_{2,n_2}^2) = (5,2)$$

$$(m_{3,n_3}^1) = (m_{4,n_4}^1) = (7,5)$$

$$(m_{3,n_3}^2) = (3,5); (m_{4,n_4}^2) = (3,5)$$

$$e_1^{(1)} = e_2^{(1)} = 50; e_1^{(2)} = e_2^{(2)} = 25; e_1^{(3)} = e_2^{(3)} = 5$$

$$e_1^{(4)} = e_2^{(4)} = 1$$

$$k(1,1) = k(2,1) = 4, k(1,2) = k(2,2) = 8; k(1,3) = 13$$

$$k(2,3) = 12, k(1,4) = 18, k(2,4) = 17 .$$

Le système des suites de multiplicité de $C_1 \cup C_2$ est le suivant.

100	100	50	50	50	50	25	25	25	10	10	5	5	5	2	2	1	1	*
100	100	50	50	50	50	25	25	15	10	5	5	1	1	1	1	1	1	*

$$\left[\sum_0^8 \nu_j^1 \nu_j^2 = 31625 = (C_1 \cdot C_2) \Rightarrow \sigma_{1,2} = 8 . \right]$$

Les quotient polaires sont

$$r_1 = n_1^1/d_4^1 = n_1^2/d_4^2 = 1/10$$

$$r_2 = n_1^1 n_2^1/d_8^1 = n_1^2 n_2^2/d_8^2 = 1/625$$

$$r_3 = n_1^2 n_2^2 n_3^2/d_{12}^2 = 2/1265$$

$$r_4 = n_1^1 n_2^1 n_3^1/d_{13}^1 = 2/1275$$

$$r_5 = n_1^2 n_2^2 n_3^2 n_4^2/d_{17}^2 = 20/12651$$

$$r_6 = n_1^1 n_2^1 n_3^1 n_4^1/d_{18}^1 = 20/12757$$

References.

- [BK] E. Brieskorn, H. Knörrer: Plane Algebraic Curves. (Birkhäuser Verlag, 1986).
- [EN] D. Eisenbud, W. Neumann: Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities. (Ann. of Math. Studies, 110, Princeton 1985)
- [F] W. Fulton: Intersection theory. (Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 2, Springer Verlag 1984)
- [G] A.M. Gabrielov: Polar curves and Intersection Matrices of Singularities. (Inv. Math. 54–1979).
- [L] Lê, D.T.: Courbes polaires et résolution des courbes planes (Prep. Centre de Math. Ecole Polytechnique, Palaiseau M 695.0285 Fev. 1985)
- [Li] B. Lichtin: Some algebro-geometric formulae for poles of $|f(x,y)|^8$. (Amer. J. of Math. V107, 1–1985)
- [LMW] Lê, D.T., F. Michel, C. Weber: Courbes polaires et topologie des courbes planes. (à paraître)
- [LS] Lê V.T., J. Steenbrink: Spectre d'une singularité d'un germe de courbe plane (Prep. Max-Planck-Inst. für Math. Bonn 1988, à paraître)
- [M] M. Merle: Invariants polaires des courbes planes (Invent. Math. 41, 1977)
- [S] H. Schubert: Über eine numerische Knoteninvariante. (Math. Zeitschr. Bd 61, 1954)

- [SZ] J. Steenbrink, S. Zucker: Polar curves, Resolution of singularities and the filtered mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. (Prep. Math. Inst. Univ. Leiden, 1987).
- [T] B. Teissier: Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces. (Inv. Math. 40, 1977)