

Algebraic Surfaces with Log-terminal Singularities

and nef Anticanonical Class

and Reflection Groups in Lobachevsky Spaces

V.V.Nikulin

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
5300 Bonn 3

V.V.Nikulin
Steklov Mathematical
Institute
ul.Vavilova 42,
Moscow, GSP-1
117966, USSR

MPI/89-28

Algebraic Surfaces with Log-terminal Singularities and nef Anticanonical Class and Reflecton Groups in Lobachevsky Spaces

V.V.NIKULIN

Introduction

- §1 Convex polyhedra with acute angles in Lobachevsky spaces and the diagram method
- §2 Reflection groups in Lobachevsky spaces and the diagram method
- §3 Diagram method and algebraic surfaces
- §4 Projective algebraic surfaces with log-terminal singularities and nef anticanonical class
 - 4.1 Two-dimensional log-terminal singularities
 - 4.2 Projective algebraic surfaces with log-terminal singularities and nef anticanonical class
 - 4.3 Arithmetical nature of the set of exceptional curves on Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities and nef anticanonical class
 - 4.4 Log-terminal and almost Del Pezzo and Del Pezzo log-terminal systems of exceptional curves and vectors
 - 4.5 Types and invariants of surfaces with nef anticanonical class and log-terminal singularities
 - 4.6 Almost Del Pezzo surfaces with log terminal singularities
 - 4.7 Surfaces with nef anticanonical class and log-terminal singularities

Introduction

In the series of papers of the author [10], E.B.Vinberg [6], M.N.Prokhorov [14] and A.G.Khovanskii [15], it was proved that reflection groups in Lobachevsky spaces with the fundamental polyhedron of finite volume exist in dimensions < 996 only. The proof was based on the investigation of geometrical properties of the fundamental polyhedra M of the groups. They are closed convex polyhedra characterised by the property that any dihedral angle has the form π/n , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. In [11], [12] we remarked that in the above series of papers a general result about polyhedra with acute angles in Lobachevsky space was proved. We formulate this result now.

Let M be a convex polyhedron in a Lobachevsky space L (defined by a hyperbolic form Φ of signature $(1, n)$, $n = \dim L$) and $P(M) \subset \Phi$ be the set of all vectors orthogonal to the faces of M

of highest dimension. Let $\Gamma(M) = (v_i \cdot v_j)$, $v_i, v_j \in P(M)$ be the Gram matrix (equivalently Gram graph) of M . A subset $E \subset P(M)$ is called elliptic if its Gram matrix is negative definite. A subset $L \subset P(M)$ is called Lanner if its Gram matrix is hyperbolic, but the Gram matrix of any proper subset of L is not hyperbolic (or L is a minimal hyperbolic subset). In fact, in [10], [6], [14], [15] the following general result about polyhedra with acute angles in Lobachevsky space was obtained.

Lemma 1. Let M be a closed polyhedron with acute angles in Lobachevsky space L and suppose there exist some constants d, C_1, C_2 such that

1) $\text{diam } L \leq d$ for any Lanner subset $L \subset P(M)$;

2) $\#\{v_1, v_2 \in E \mid \rho(v_1, v_2) \leq d - 1\} \leq C_1(\#E)$

and

$\#\{v_1, v_2 \in E \mid d \leq \rho(v_1, v_2) \leq 2d - 1\} \leq C_2(\#E)$

for any elliptic subset $E \subset P(M)$.

Then

$$\dim L < 96(C_1 + C_2/3) + 68.$$

Here we have formulated a slightly stronger result than was formulated in [11], [12].

Now let Z be a projective algebraic surface with normal singularities over an arbitrary algebraically closed ground field. Let K_Z be its canonical class. The surface Z is called a Del Pezzo surface if the anticanonical class $-K_Z$ is numerically ample, i.e. $-K_Z \cdot D > 0$ for any nontrivial effective Weil divisor D of Z . A two-dimensional singularity (Z, z) is called log-terminal if for the minimal resolution $\sigma : Y \rightarrow Z$ of the singularity in the standard formula

$$F_Y = \sigma^* K_Z + \sum \alpha_i F_i,$$

we have: all $\alpha_i > -1$. Here F_i are the irreducible components of the exceptional divisor of σ .

The Neron-Severi lattice $NS(Y)$ is hyperbolic. The set $\text{Exc}(Y)$ of all exceptional curves of Y gives a convex polyhedron $M(Y)$ with acute angles in Lobachevsky space $L(Y)$ defined by $NS(Y)$, i.e. $P(M(Y)) = \text{Exc}(Y)$. In [11], [12] we observed that $M(Y)$ is closed. We showed that this is equivalent to the fact that the Mori polyhedron $NE(Y)$ is generated by the set $\text{Exc}(Y)$ (the polyhedra $M(Y)$ and $NE(Y)$ are dual to one another); the last fact follows from the Shokurov-Kawamata results [16], [22] and was remarked by V.A.Alekseev in [4], [5] (one can see the proof in [11] also). It follows that one can apply Lemma 1 to the polyhedron $M(Y)$. We

and later V.A.Alekseev did this in [11], [12], [2] and obtained some classificational results about Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over the ground field \mathbb{C} of complex numbers (the Shokurov-Kawamata results are valid over \mathbb{C} only).

Here we obtain by the same method further classification results about Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities and improve some results of [11], [12], [2]. But the basic goal of this work is to extend the results of the works above to the case of projective algebraic surfaces Z with log-terminal singularities and only nef anticanonical class $-K_Z$ (this means that $-K_Z \cdot D \geq 0$ for any effective Weil divisor D on Z) and over an arbitrary ground field.

In the case when $-K_Z$ is nef the basic difficulty is that the polyhedron $M(Y)$ is not closed. It may have infinitely many faces. To overcome this difficulty we consider the following types of polyhedra in Lobachevsky space.

A polyhedron M is called elliptic if it is closed, i.e. it is the convex hull of a finite set of points.

A polyhedron M in Lobachevsky space L is called parabolic with respect to a point P at infinity if for any elliptic polyhedron K on a horosphere with center P the polyhedron $C_K \cap M$ is elliptic. Here C_K is the cone with vertex P over K .

A polyhedron M in Lobachevsky space L is called hyperbolic with respect to a subspace $T \subset L$ if for any elliptic polyhedron $K \subset T$ the polyhedron $C_K \cap M$ is elliptic. Here C_K is the union of the lines AB , $A \in K$ and $AB \perp T$.

We prove (Lemmas 1.2.1 and 1.2.2) that if M is parabolic then there exists an elliptic face $\gamma \subset M$ of codimension 1 with $P \notin [\gamma]$. If M is hyperbolic then there exists an elliptic face $\gamma \subset M$, $\text{codim } \gamma \leq \dim T$ and γ is cut out by face hyperplanes of M which do not contain T . If M has acute angles then γ also has acute angles and we can apply Lemma 1 to γ .

From the classical results of Mori [23] we deduce (see proposition 3.1):

Proposition 2. Let Y be a nonsingular projective algebraic surface over an arbitrary algebraically closed ground field such that the anticanonical class $-K_Y$ is pseudoeffective and $-K_Z = P + \sum \beta_i F_i$ is its Zariski decomposition (here P is nef; $P \cdot F_i = 0$; F_i , $i = 1, 2, \dots, n$, is elliptic set of exceptional curves; all $\beta_i > 0$).

Then $M(Y)$ is elliptic if $P^2 > 0$, $M(Y)$ is parabolic with respect to $\mathbb{R} + P$ if $P^2 = 0$ and $P \neq 0$, and $M(Y)$ is hyperbolic with respect to the subspace $\gamma = \bigcap H_{F_i}$ (intersection of hyperplanes H_{F_i} orthogonal to F_i , $i=1, \dots, n$) if $P \equiv 0$.

If Z is a normal projective algebraic surface, the anticanonical class $-K_Z$ is nef and $\sigma : Y \rightarrow Z$ is the minimal resolution of singularities of Z , then Zariski decomposition of $-K_Y$ has the form

$$-K_Y = -\sigma^*K_Z + \sum \beta_j F_j, \quad (0.1)$$

where F_j are the components of the exceptional divisor of σ . It follows that $M(Y)$ is elliptic if $(K_Z)^2 > 0$, $M(Y)$ is parabolic if $(K_Z)^2 = 0$ and $K_Z \neq 0$, $M(Y)$ is hyperbolic if $K_Z \equiv 0$. Hence we can apply Proposition 2 to Y and Lemma 1 to the elliptic face γ of $M(Y)$ (see above) in this case. We do this if Z has log-terminal singularities and obtain the following results, which we number as is done in the main text of the paper.

The index $k(Z)$ of Z is the least common multiple of the denominators of all rational numbers β_j in (0.1).

The fractional index $r(Z)$ is the positive rational number such that $K_Z = r(Z)h$, where h is the primitive class of Cartier divisors with respect to numerical equivalence.

The invariant $\epsilon(Z)$ is

$$\epsilon(Z) = \min \{ -\sigma^*(K_Z) \cdot E \mid E \text{ is a curve of the 1st kind and } -\sigma^*K_Z \cdot E > 0 \}.$$

This invariant was introduced by V.A.Alekseev [2].

The invariant $\beta(Z)$ is

$$\beta(Z) = \min \{ -\beta_i + 1 \}, \beta_i \text{ are the coefficients in (0.1).}$$

The multiplicity $e(Z)$ is

$$e(Z) = \max \{ e(z) \mid z \in \text{Sing } Z \}$$

where $e(z)$ is the multiplicity of the singular point z .

A projective algebraic surface Z is called an almost Del Pezzo surface if $-K_Z$ is nef and for the minimal resolution of singularities $\sigma : Y \rightarrow Z$ we have: $-K_Z \cdot E > 0$ for any curve E of the 1st kind on Y .

We obtain here the following theorems about projective algebraic surfaces Z with log-terminal singularities and nef anticanonical class $-K_Z$, where $\rho(Y) = \text{rk } \text{NS}(Y)$ is the Picard number.

Theorem 4.6.1. Let Z be an almost Del Pezzo surface with log-terminal singularities over an arbitrary algebraically closed field and $\sigma : Y \rightarrow Z$ be the minimal resolution of singularities.

Then

$$\rho(Y) < \begin{cases} 96(5/\epsilon(Z) + 12) + 69, & \text{if } K_Z^2 > 0; \\ 96(5/\epsilon(Z) + 12) + 70, & \text{if } K_Z^2 = 0. \end{cases}$$

From the inequalities $1/k(Z) \leq r(Z) \leq \epsilon(Z)$, we deduce

Theorem 4.6.6. Let Z be an almost Del Pezzo surface with log-terminal singularities over an arbitrary algebraically closed ground field and $\sigma : Y \rightarrow Z$ be the minimal resolution of singularities.

Then

$$\rho(Y) < \begin{cases} 96(5k(Z) + 12) + 69, & \text{if } K_Z^2 > 0; \\ 96(5k(Z) + 12) + 70, & \text{if } K_Z^2 = 0. \end{cases}$$

Theorem 4.6.8. Let Z be an almost Del Pezzo surface with log-terminal singularities over an arbitrary algebraically closed ground field and $\sigma : Y \rightarrow Z$ be the minimal resolution of singularities.

Then

$$\rho(Y) < \begin{cases} 96(5/r(Z) + 12) + 69, & \text{if } K_Z^2 > 0; \\ 96(5/r(Z) + 12) + 70, & \text{if } K_Z^2 = 0. \end{cases}$$

The following important theorem follows from the theorem 4.6.8.

Theorem 4.6.9. The set R of fractional indexes of all almost Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over an arbitrary algebraically closed ground field is contained in $(0, 3]$, the set of accumulation points of R is $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, and every increasing sequence in R is finite.

Theorem 4.6.6 with the estimate $< Ak(Z)^{7/2}$ was first proved for Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over \mathbb{C} by the author [11], [12] using the method described above. Later by the same method, for Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over \mathbb{C} , Theorems 4.6.1, 4.6.6 and 4.6.8 with linear estimates which were approximately ten time worse than here were obtained by V.A.Alekseev [2]. For Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over \mathbb{C} , Theorem 4.6.9 was obtained by V.A.Alekseev [2]. Thus we have generalised these results to almost Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over an arbitrary algebraically closed field and have improved the estimates.

Theorem 4.6.10. Let Z be an almost Del Pezzo surface with log-terminal singularities over an arbitrary algebraically closed ground field, $\sigma : Y \rightarrow Z$ be the minimal resolution of singularities and $e = e(Z)$.

Then for $K_Z^2 > 0$

$$\rho(Y) < \begin{cases} 3141, & \text{if } e = 2, \\ 5317, & \text{if } e = 3, \\ 17735, & \text{if } e = 4, \\ \frac{192e(e-3)(6e-27)}{\varepsilon(e)} + 1536e^2(e-3) + 69, & \text{if } e \geq 5; \end{cases}$$

and for $K_Z^2 = 0$

$$\rho(Y) < \begin{cases} 3142, & \text{if } e=2, \\ 5318, & \text{if } e=3, \\ 17736, & \text{if } e=4, \\ \frac{192e(e-3)(6e-27)}{\varepsilon(e)} + 1536e^2(e-3) + 70, & \text{if } e \geq 5; \end{cases}$$

the function $\varepsilon(e)$ is defined in remark 4.6.13.

It is interesting that in the proof of this theorem we do not use the almost Del Pezzo condition if $e(Z) \leq 4$. Theorem 4.6.10 holds for nonsingular projective algebraic surfaces Y with log-terminal exceptional curve system $\text{Exc}(Y)$ of multiplicity ≤ 4 , if $M(Y)$ is either elliptic or parabolic (see theorem 4.6.5). It is not true for multiplicity ≥ 5 (see remark 4.6.16).

The following theorems hold for arbitrary surfaces with log-terminal singularities and nef anticanonical class $-K_Z$.

Theorem 4.7.2. Let Z be an algebraic surface with log-terminal singularities and nef anticanonical class $-K_Z$ (over arbitrary algebraically closed ground field). Let $\sigma : Y \rightarrow Z$ be the minimal resolution of singularities and N the number of all irreducible components of the exceptional divisor of σ lying over singular points of multiplicity ≥ 3 , $\varepsilon = \varepsilon(Z)$, $\beta = \beta(Z)$.

Then

$$\rho(Y) < 128(3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 3) + 70, \quad \text{if } K_Z \neq 0;$$

$$N < 128(3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 3) + 68 \quad \text{and} \\ \rho(Y) < 256(3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^3) + 3/\beta) + 78, \quad \text{if } K_Z \equiv 0.$$

From the obvious inequalities $\varepsilon(Z) \geq 1/k(Z)$ and $\beta(Z) \geq 1/k(Z)$ one obtains the following analog of Theorem 4.6.6.

Theorem 4.7.5. With the conditions of Theorem 4.7.2 we have:

$$\begin{aligned} \rho(Y) &< 128(3k(Z) + 9)\left(\frac{1}{3}k(Z)^2 + 3\right) + 70, \text{ if } K_Z \equiv 0; \\ N &< 128(3k(Z) + 9)\left(\frac{1}{3}k(Z)^2 + 3\right) + 68 \text{ and} \\ \rho(Y) &< 256(3k(Z) + 9)\left(\frac{1}{3}k(Z)^3 + 3k(Z)\right) + 78, \text{ if } K_Z \equiv 0. \end{aligned}$$

Corollary 4.7.6. Under the conditions above, the set of Gram graphs $\Gamma(\text{Exc}(Y))$ is finite if $K_Z^2 > 0$ and the index $k(Z)$ is fixed.

This corollary was first obtained in [11], [12] for Del Pezzo surfaces with log-terminal singularities over \mathbb{C} .

We want to remark that this method works also in the case of log-canonical singularities and that analogous statements also hold for projective algebraic surfaces with log-canonical singularities and nef anticanonical class. We hope to show this in later papers. It would be interesting to extend these results to other types of singularities.

We obtain parallel results in the theory of reflection groups in Lobachevsky spaces also (see § 2).

Let G be a discrete group in Lobachevsky space L with a fundamental polyhedron of finite volume. We say that G is a generalized reflection group (compare with [26]) if for its reflection subgroup W the factor group G/W , considered as a group of symmetries of some fundamental polyhedron M of W , contains a subgroup A' of finite index which leaves invariant a proper subspace L' of L . We show (see Proposition 2.2) that in this definition we can suppose that L' is generated by $L' \cap M$. In this case M is elliptic if L' is a finite point, M is parabolic with respect L' if L' is an infinite point and M is hyperbolic with respect to L' if L' is a finite subspace of L .

Theorem 2.3. Let G be a generalized reflection group in Lobachevsky space L .

Then

- a) $\dim L < 996$ if L' is a finite point (this is a result of Prokhorov [14] and Khovanskii [15]);
- b) $\dim L < 997$ if L' is an infinite point;
- c) $\dim L < 996 + \dim L'$ if L' is a finite subspace of L .

We do not know whether there exists an absolute estimate of $\dim L$ in the case c).

The final part of the paper was written by the author during his stay in the Max-Planck-Institut für Mathematik (May 1989). We are grateful to Prof. F. Hirzebruch and the Max-Planck-Institut for their hospitality. We are grateful to Profs N.-P. Skoruppa and D. Zagier for their friendly help in preparing the manuscript.

§ I. Выпуклые многогранники с острыми углами в пространствах Лобачевского и метод диаграмм.

1.1⁰. Модель Клейна пространства Лобачевского. Пусть Φ - гиперболическое линейное пространство (т.е. \mathbb{R} - линейное пространство с заданной на нем невырожденной симметрической \mathbb{R} - билинейной формой с индексами инерции $(1, n)$, где $n = \dim \Phi$). Для $x, y \in \Phi$ пусть $x \cdot y$ - значение соответствующей Φ гиперболической формы на паре элементов (x, y) и пусть $x^2 = x \cdot x$. С Φ связан открытый конус

$$V = \{x \in \Phi \mid x^2 > 0\},$$

имеющий две половины. Пусть V^+ - одна из этих полов. Тогда соответствующее Φ пространство Лобачевского - это множество лучей

$$\mathcal{L} = V^+ / \mathbb{R}^+ = \{\mathbb{R}^+ x \mid x \in V^+\},$$

где \mathbb{R}^+ - множество положительных действительных чисел. Если кривизна \mathcal{L} нормируется как (-1) , то расстояние в \mathcal{L} определяется по формуле

$$\operatorname{ch} \rho(\mathbb{R}^+ x, \mathbb{R}^+ y) = (x \cdot y) / \sqrt{x^2 \cdot y^2}.$$

При этом группа движений \mathcal{L} индуцируется группой автоморфизмов гиперболического пространства Φ , переводящих в себя полу V^+ .

Полупространства \mathcal{L} имеют вид

$$\mathcal{H}_\delta^+ = \{\mathbb{R}^+ x \in \mathcal{L} \mid x \cdot \delta \geq 0\},$$

где $\delta \in \Phi$ - элемент, для которого $\delta^2 < 0$. Это полупространство ограничено гиперплоскостью

$$\mathcal{H}_\delta = \{ \mathbb{R}^+ x \in \mathcal{L} \mid x \cdot \delta = 0 \}.$$

При этом элемент δ определяется полупространством \mathcal{H}_δ^+ (соответственно гиперплоскостью \mathcal{H}_δ) однозначно с точностью до умножения на элементы \mathbb{R}^+ (соответственно \mathbb{R}^*) и называется ортогональным вектором полупространства (гиперплоскости). Предположим, что два полупространства $\mathcal{H}_{\delta_1}^+$ и $\mathcal{H}_{\delta_2}^+$ имеют в пересечении непустое открытое подмножество \mathcal{L} . Тогда эти полупространства:

а) образуют угол $\mathcal{H}_{\delta_1}^+ \cap \mathcal{H}_{\delta_2}^+$ величины φ , где

$$\cos \varphi = (\delta_1 \cdot \delta_2) / \sqrt{\delta_1^2 \cdot \delta_2^2}, \quad (1.1)$$

если $-1 \leq (\delta_1 \cdot \delta_2) / \sqrt{\delta_1^2 \cdot \delta_2^2} \leq 1$.

б) гиперплоскости \mathcal{H}_{δ_1} и \mathcal{H}_{δ_2} расходятся и расстояние между ними равно ρ , где

$$\operatorname{ch} \rho = (\delta_1 \cdot \delta_2) / \sqrt{\delta_1^2 \cdot \delta_2^2}, \quad (1.2)$$

если $1 \leq (\delta_1 \cdot \delta_2) / \sqrt{\delta_1^2 \cdot \delta_2^2}$.

Как обычно, мы будем пополнять \mathcal{L} бесконечно удаленными точками $\mathbb{R}^+ c$, где $c \in \phi$, $c^2 = 0$, $c \cdot V^+ > 0$. При этом \mathcal{L} вместе с бесконечно удаленными точками образует замкнутый диск

$$\overline{\mathcal{L}} = (\overline{V^+} - \{0\}) / \mathbb{R}^+,$$

(где $\overline{V^+}$ - замыкание V^+), граница которого является сферой размерности $n-1$. Она называется ∞ -сферой. Полупространства \mathcal{H}_δ^+ и гиперплоскости \mathcal{H}_δ также пополняются бесконечно удаленными точками:

$$\overline{\mathcal{H}_\delta^+} = \{ \mathbb{R}^+ x \in \overline{\mathcal{L}} \mid x \cdot \delta \geq 0 \},$$

$$\overline{\mathcal{H}_\delta} = \{ \mathbb{R}^+ x \in \overline{\mathcal{L}} \mid x \cdot \delta = 0 \}.$$

1.2⁰. Многогранники в пространстве Лобачевского

Выпуклый невырожденный локально конечный многогранник \mathcal{M} в пространстве Лобачевского \mathcal{L} определяется как пересечение некоторого множества полупространств:

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\delta \in P(\mathcal{M})} \overline{\mathcal{H}_\delta^+}$$

Здесь $P(\mathcal{M}) \subset \Phi$ - некоторое не более чем счетное подмножество векторов с отрицательным квадратом. При этом считается, что никакие два из векторов $P(\mathcal{M})$ не пропорциональны; всякое полупространство \mathcal{H}_δ^+ , $\delta \in P(\mathcal{M})$, отвечает грани \mathcal{M} старшей размерности, т.е. на гиперплоскости \mathcal{H}_δ лежит грань старшей размерности. Этими условиями подмножество $P(\mathcal{M}) \subset \Phi$ определено однозначно с точностью до умножения элементов $P(\mathcal{M})$ на элементы \mathbb{R}^+ . Множество $P(\mathcal{M})$ называется множеством векторов, ортогональных граням \mathcal{M} старшей размерности. Напомним, что \mathcal{M} называется невырожденным, если он содержит непустое открытое подмножество \mathcal{L} . Многогранник \mathcal{M} называется локально-конечным, если для всякой конечной точки $x \in \mathcal{L}$ найдется такая ее окрестность U , которая пересекается лишь с конечным числом гиперплоскостей \mathcal{H}_δ , $\delta \in P(\mathcal{M})$.

1.2.1⁰. Эллиптические многогранники. Мы скажем, что выпуклый невырожденный многогранник M в пространстве Лобачевского является эллиптическим, если $P(M)$ конечно (в частности, M локально конечен) и M — замкнутый многогранник в пространстве Лобачевского, т.е. $M \cap L_\infty$ — это не более чем конечное множество точек. Другими словами, M является выпуклой оболочкой конечного числа точек \bar{L} , не лежащих в одной гиперплоскости.

1.2.2⁰. Параболические многогранники. Напомним понятие орисферы. Пусть $P = R^+c \in L_\infty$ — бесконечно удаленная точка пространства Лобачевского L . Орисфера \mathcal{E}_P с центром в P — это множество прямых в L , проходящих через P . Такая прямая l , проходящая через точку $R^+h \in \bar{L}$, отличную от P , имеет вид $\{R^+(c+th) \mid t \in R^+ \cup \{0\}\}$. Пусть $R > 0$ — некоторая константа и $l_1, l_2 \in \mathcal{E}_P$. Тогда найдутся точки $R^+h_1 \in l_1, R^+h_2 \in l_2$, для которых $h_1^2 = h_2^2 = 1$ и $h_1 \cdot c = h_2 \cdot c = R$. Положим

$$\rho(l_1, l_2) = \sqrt{-(h_1 - h_2)^2} \quad (2.1)$$

При изменении R это расстояние меняется на подобное, и орисфера \mathcal{E}_P с этим расстоянием является евклидовым пространством. Множество точек

$$\mathcal{E}_{P,R} = \{R^+h \in \bar{L} \mid h^2 = 1 \text{ и } h \cdot c = R\} \cup \{P\}$$

является в пространстве Лобачевского L сферой, содержащей точку P , касающейся L_∞ в P и ортогональной всем прямым в L , проходящим через P . Расстояние в L индуцирует в

$\mathcal{E}_{P,R} - \{P\}$ евклидово расстояние, подобное задаваемому формулой (2.1). Множество $\mathcal{E}_{P,R}$ также называют орисферой с центром в P , так как оно отождествляется с \mathcal{E}_P , если точке $X \in \mathcal{E}_{P,R} - \{P\}$ сопоставить прямую PX . Движения \mathcal{L} , переводящие P в себя, очевидно переводят орисферы \mathcal{E}_P и $\mathcal{E}_{P,R}$ в себя и являются их аффинными евклидовыми преобразованиями. Это задает изоморфизм стационарной подгруппы точки P в группе движений \mathcal{L} с аффинной евклидовой группой движений орисфер \mathcal{E}_P и $\mathcal{E}_{P,R}$.

Для подмножества $K \subset \mathcal{E}_P$ подмножество

$$C_K = \bigcup_{l \in K} \bar{l}$$

в $\bar{\mathcal{L}}$ называется конусом в \mathcal{L} с вершиной P и основанием K на орисфере \mathcal{E}_P . При этом конус $C_{\mathcal{T}}$ является в $\bar{\mathcal{L}}$ подпространством размерности $\dim \mathcal{T} + 1$, если $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}_P$ - евклидово подпространство.

Выпуклый невырожденный локально конечный многогранник \mathcal{M} в пространстве Лобачевского \mathcal{L} называется параболическим (относительно точки $P \in \mathcal{L}_\infty$), если выполнены условия:

1) \mathcal{M} конечен в точке P , т.е. для $P = \mathbb{R}^+$ с множеством $\{\delta \in P(\mathcal{M}) \mid c \cdot \delta = 0\}$ конечно.

2) Для всякого выпуклого замкнутого многогранника $N \subset \mathcal{E}_P$ (т.е. выпуклой оболочки конечного числа точек, не лежащих в одной гиперплоскости) выпуклый многогранник $C_N \cap \mathcal{M}$ является эллиптическим, если он невырожден.

Из определения сразу же следует, что параболический многогранник \mathcal{M} эллиптичен, если и только если либо $P \notin \mathcal{M}$, либо гиперплоскости граней \mathcal{M} старшей размерности, проходящих через P , пересекают на орисфере \mathcal{E}_P выпуклый замкнутый много-

гранник, т.е.

$$M_P = \left\{ l \in \mathcal{E}_P \mid l \subset \bigcap_{\substack{\delta \in P(M), \\ \delta \cdot c = 0}} \mathcal{H}_\delta^+ \right\} \quad (2.2)$$

- выпуклый замкнутый многогранник в \mathcal{E}_P .

Нам понадобится следующая

Лемма 1.2.1. Пусть M - выпуклый невырожденный локально конечный многогранник в пространстве Лобачевского \mathcal{L} , причем M параболичен относительно точки $P \in \mathcal{L}_\infty$.

Тогда найдется такая грань γ многогранника M размерности $\dim \mathcal{L} - 1$, что M в окрестности гиперплоскости $[\gamma]$ является эллиптическим многогранником (в частности, γ - эллиптический многогранник в $[\gamma]$) и гиперплоскость $[\gamma]$ не содержит точку P .

Доказательство. Предположим, вначале, что $P \notin M$. Тогда для некоторого $\delta \in P(M)$ точка P не содержится в полупространстве \mathcal{H}_δ^+ . Пусть $\mathcal{D} = \{PX \in \mathcal{E}_P \mid X \in \mathcal{H}_\delta^+\}$ - диск в \mathcal{E}_P . Очевидно, найдется замкнутый многогранник $N \subset \mathcal{E}_P$, содержащий \mathcal{D} . Тогда $M = M \cap C_N$ эллиптивен и искомая грань γ очевидно существует.

Предположим теперь, что $P \in M$. Пусть точка Q лежит внутри M и $N \subset \mathcal{E}_P$ - выпуклый замкнутый многогранник, лежащий в M_P (задаваемом (2.2)) и содержащий внутри себя точку PQ . Многогранник $C_N \cap M$ невырожден, так как содержит окрестность точки Q . Поэтому он эллиптивен. По построению он совпадает в точке P с C_N . Отсюда следует, что найдется его грань β старшей размерности, гиперплоскость которой $[\beta]$ не содержит P и поэтому является гиперплоскостью $[\gamma]$ грани γ старшей размерности многогранника M (очевидно,

$\beta < \gamma$); $[\gamma] = \mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M), \delta \cdot c \neq 0$. Подмножество $C_\gamma = \{l \in \mathcal{E}_p \mid l \cap \overline{\mathcal{H}_\delta} \neq \emptyset\}$ является на сфере замкнутым диском. Пусть $T \subset \mathcal{E}_p$ — выпуклый замкнутый многогранник, внутренность которого содержит диск C_γ (он, очевидно, существует). Многогранник M в окрестности гиперплоскости $\overline{\mathcal{H}_\delta}$ по построению T совпадает с $C_T \cap M$. Так как $C_T \cap M$ эллиптичен, то и M эллиптичен в окрестности $\overline{\mathcal{H}_\delta}$. \blacktriangleright

1.2.3^o. Гиперболические многогранники. Пусть M — невырожденный выпуклый локально конечный многогранник в пространстве Лобачевского \mathcal{L} и $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ — подпространство, причем $1 \leq \dim \mathcal{T} \leq \dim \mathcal{L} - 1$. Для подмножества $K \subset \mathcal{T}$ пусть

$$C_K = \bigcup_{\substack{l \perp \mathcal{T}, \\ l \cap \mathcal{T} \in K}} \overline{l},$$

где l обозначает прямую в \mathcal{L} .

Выпуклый невырожденный локально конечный многогранник M в \mathcal{L} называется гиперболическим (относительно \mathcal{T}), если выполнены условия:

1) M конечен в бесконечно удаленных точках, т.е. для любой точки $R^+c \in \mathcal{L}_\infty$ множество $\{\delta \in P(M) \mid \delta \cdot c = 0\}$ конечно;

2) для всякого эллиптического компактного (т.е. без бесконечно удаленных вершин) многогранника $N \subset \mathcal{T}$ многогранник $C_N \cap M$ эллиптичен, если он невырожден.

Нам понадобится

Лемма 1.2.2. Пусть M — невырожденный выпуклый локаль-

но конечный многогранник в пространстве Лобачевского и пусть M гиперболичен относительно подпространства $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$.

Тогда найдется такая грань γ многогранника M , что $\text{codim } \gamma \leq \dim \mathcal{T}$, грань γ эллиптически в порождаемом ею подпространстве $[\gamma]$ и подпространство $[\gamma]$ высекается гиперплоскостями $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$, не содержащими \mathcal{T} .

Доказательство. Проведем индукцию по $\dim \mathcal{T}$.

Пусть $\dim \mathcal{T} = 1$. Предположим, что существует гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$, для которой либо $\overline{\mathcal{H}_\delta} \cap \overline{\mathcal{T}} = \emptyset$, либо \mathcal{H}_δ — пересекает \mathcal{T} в конечной точке. Ортогональная проекция \mathcal{D} гиперплоскости $\overline{\mathcal{H}_\delta}$ на \mathcal{T} является компактным диском в \mathcal{T} . Пусть $N \subset \mathcal{T}$ — такой эллиптический компактный многогранник в \mathcal{T} , что внутри него лежит \mathcal{D} . По построению, многогранник $\overline{C_N \cap M}$ эллиптически и в окрестности гиперплоскости $\overline{\mathcal{H}_\delta}$ совпадает с M . Грань γ многогранника M размерности $\dim \mathcal{L} - 1$, лежащая на гиперплоскости \mathcal{H}_δ , очевидно является искомой. Предположим теперь, что всякая гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$, либо содержит \mathcal{T} , либо пересекает \mathcal{T} в бесконечно удаленной точке. В любом случае все гиперплоскости $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$, проходят через две бесконечно удаленные точки прямой \mathcal{T} . Так как M конечен в бесконечно удаленных точках, то отсюда следует, что число гиперплоскостей $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$, конечно. Это дает, что M эллиптически. Очевидно, найдется гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$, не содержащая \mathcal{T} . Грань γ многогранника M размерности $\dim \mathcal{L} - 1$, лежащая на этой гиперплоскости, является искомой.

Пусть $\dim \mathcal{T} > 1$. Разберем несколько случаев.

Пусть существует такая гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta, \delta \in P(M)$,

для которой $\overline{\mathcal{T}} \cap \overline{\mathcal{H}}_\delta = \emptyset$. В этом случае ортогональная проекция $\overline{\mathcal{H}}_\delta$ на \mathcal{T} является в \mathcal{T} компактным диском. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — такой компактный эллиптический многогранник, что \mathcal{D} лежит внутри \mathcal{N} . Тогда $\mathcal{C}_\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ эллиптичен и по построению в окрестности \mathcal{H}_δ совпадает с \mathcal{M} . Грань β многогранника \mathcal{M} размерности $\dim \mathcal{L} - 1$, лежащая на \mathcal{H}_δ , является искомой.

Пусть существует такая гиперплоскость \mathcal{H}_δ , $\delta \in P(\mathcal{M})$, для которой пересечение $\overline{\mathcal{T}} \cap \overline{\mathcal{H}}_\delta$ является бесконечно удаленной точкой $P \in \mathcal{L}_\infty$. Рассмотрим грань β размерности $\dim \mathcal{L} - 1$ многогранника \mathcal{M} , лежащую на гиперплоскости \mathcal{H}_δ . Пусть точка A лежит внутри β и A' — ее ортогональная проекция на \mathcal{T} . Тогда $A' \neq P$ и найдется полупространство \mathcal{H}_1^+ в \mathcal{T} , не содержащее точку P , но содержащее точку A' , причем внутри \mathcal{H}_1^+ . Полупространство \mathcal{H}_1^+ является ортогональной проекцией на \mathcal{T} полупространства \mathcal{H}^+ в \mathcal{L} , ограниченного гиперплоскостью \mathcal{H} . Точка P не лежит в \mathcal{H}^+ , поэтому ортогональная проекция на \mathcal{T} полупространства $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}_\delta$ компактна. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}$ — эта проекция и $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — такой компактный многогранник, что \mathcal{D} лежит внутри \mathcal{N} . Многогранник $\mathcal{C}_\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ эллиптичен, так как \mathcal{M} гиперболичесен, и, по построению, эллиптический многогранник $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{C}_\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ в окрестности $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}_\delta$ совпадает с $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{M}$. Его грань, лежащая на гиперплоскости \mathcal{H}_δ , совпадает с $\mathcal{H}^+ \cap \beta$ и имеет размерность $\dim \mathcal{L} - 1$, поскольку содержит точку A , лежащую внутри \mathcal{H}^+ и внутри β . Так как $P \notin \mathcal{H}^+$, то найдется такая прямая (PM) в \mathcal{H}_δ , которая пересекает многогранник $\mathcal{H}^+ \cap \beta$ по внутренним точкам и не проходит через его бесконечно удаленные точки. Пусть

$(PM) \cap \mathcal{H}^+ \cap \beta = [R, S]$, где R лежит между P и S . Тогда найдется грань γ' размерности $\dim \mathcal{L} - 2$ многогранника $\mathcal{H}^+ \cap \beta$, подпространство которой $[\gamma']$ пересекает прямую (PM) по точке S и отлично от $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_\delta$, так как $P \notin \mathcal{H}^+$ и поэтому точка $\mathcal{H} \cap (PM)$ лежит на отрезке $[PR]$. В частности, $P \notin [\gamma']$. Грань γ' является частью грани γ размерности $\dim \mathcal{L} - 2$ многогранника β , причем $P \notin [\gamma] = [\gamma']$. Так как $[\gamma] \subset \mathcal{H}_\delta$, $\overline{\mathcal{H}_\delta} \cap \overline{\mathcal{T}} = P$ и $P \notin [\gamma]$, то ортогональная проекция $[\gamma]$ на \mathcal{T} компактна. Отсюда, как и выше, получаем, что \mathcal{M} в окрестности подпространства $[\gamma]$ эллиптичен. Пусть $[\gamma] = \mathcal{H}_\delta \cap \mathcal{H}_{\delta'}$, где $\delta' \in P(\mathcal{M})$. Гиперплоскость $\mathcal{H}_{\delta'}$ не содержит \mathcal{T} , ибо иначе точка P содержалась в $[\gamma]$. Это доказывает, что грань γ является искомой.

Пусть теперь существует такая гиперплоскость \mathcal{H}_δ , $\delta \in P(\mathcal{M})$, которая пересекает \mathcal{T} по конечным точкам. Тогда $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap \mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{H}_\delta$ - подпространство размерности $\dim \mathcal{T} - 1 \geq 1$. Легко видеть, что грань β размерности $\dim \mathcal{L} - 1$ многогранника \mathcal{M} , лежащая в гиперплоскости \mathcal{H}_δ , является в \mathcal{H}_δ гиперболическим многогранником относительно \mathcal{T}' . По предположению индукции получаем, что существует грань γ многогранника β , для которой $\dim \mathcal{L} - 1 - \dim \gamma \geq \dim \mathcal{T} - 1$ (т.е. $\text{codim } \gamma \geq \dim \mathcal{T}$), грань γ эллиптична в порождаемом ею подпространстве $[\gamma]$ и высекается гиперплоскостями граней старшей размерности для β , не содержащими \mathcal{T} . Каждая такая гиперплоскость высекается в \mathcal{H}_δ некоторой гиперплоскостью $\mathcal{H}_{\delta'}$, $\delta' \in P(\mathcal{M})$, не содержащей \mathcal{T}' . Гиперплос-

кости $\mathcal{H}_{\delta'}$ вместе с \mathcal{H}_{δ} дают в пересечении подпространство $[\delta]$ в \mathcal{L} . Все они не содержат \mathcal{T} . Грань δ является иско- мой. ►

Отметим также следующее почти очевидное утверждение.

Лемма 1.2.3. Пусть \mathcal{M} – невырожденный выпуклый локально конечный многогранник в пространстве Лобачевского, гиперболический относительно подпространства $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$.

Тогда найдется гиперплоскость \mathcal{H}_{δ} , $\delta \in P(\mathcal{M})$, такая, что \mathcal{H}_{δ} не ортогонально \mathcal{T} и не содержит \mathcal{T} .

1.3°. Многогранники с острыми углами в пространстве Лобачевского. Напомним основные факты, касающиеся многогранников с острыми углами в пространстве Лобачевского (см., например, [7]).

Выпуклый невырожденный локально конечный многогранник в пространстве Лобачевского называется многогранником с острыми углами, если для всех различных $\delta, \delta' \in P(\mathcal{M})$ имеем: $\delta \cdot \delta' \geq 0$. Из (1.1) и (1.2) следует, что двугранные углы \mathcal{M} между гранями старшей размерности действительно острые ($\leq \pi/2$). Как показал Е.М. Андреев [5], верно и обратное: если двугранные углы \mathcal{M} острые, то \mathcal{M} является многогранником с острыми углами в смысле выбранного нами определения.

Ниже \mathcal{M} – многогранник с острыми углами в пространстве Лобачевского.

Важнейшим инвариантом многогранника \mathcal{M} (и не только с острыми углами), определяющим \mathcal{M} с точностью до движений пространства Лобачевского, является его матрица Грама $(\delta_i \cdot \delta_j)$, $\delta_i, \delta_j \in P(\mathcal{M})$. Это симметрическая гиперболическая (т.е. с ровно одним положительным квадратом) матрица ранга $\leq \dim \mathcal{L} + 1$, диагональные элементы которой отрицательны,

а недиагональные — неотрицательны. Вместо матрицы Грама удобно рассматривать граф (точнее, мультиграф) Грама, вершины которого соответствуют элементам $\delta \in P(M)$ и имеют вес $(-\delta^2)$, две вершины $\delta, \delta' \in P(M)$ соединяются ребром, если и только если $\delta \cdot \delta' > 0$, вес (или кратность) этого ребра равна $\delta \cdot \delta'$. Граф Грама (или эквивалентную ему матрицу Грама) M будем обозначать $\Gamma(P(M))$ или просто $\Gamma(M)$.

Подмножество $\mathcal{E} \subset P(M)$ называется эллиптическим, если его матрица (или граф) Грама отрицательно определена. Такие подмножества важны тем, что находятся в биективном соответствии с конечными гранями M : каждое эллиптическое подмножество $\mathcal{E} \subset P(M)$ определяет конечную грань $(\bigcap_{\delta \in \mathcal{E}} \mathcal{H}_\delta) \cap M$ многогранника M коразмерности, равной числу элементов \mathcal{E} . Обратно, непустая конечная грань $\gamma \subset M$ определяет эллиптическое подмножество $\mathcal{E} = \{ \delta \in P(M) \mid \gamma \subset \mathcal{H}_\delta \}$, число элементов которого равно $\text{codim } \gamma$.

Подмножество $\mathcal{Q} \subset P(M)$ называется связным параболическим, если его граф Грама связан, а матрица Грама полуотрицательно определена и имеет нулевой квадрат. Отметим, что ранг такой матрицы равен $\# \mathcal{Q} - 1$ и она имеет ровно один нулевой квадрат. Связные параболические подмножества соответствуют бесконечно удаленным вершинам M : Если \mathcal{Q} -связное параболическое подмножество, то пересечение $\bigcap_{\delta \in \mathcal{Q}} \mathcal{H}_\delta$ является бесконечно удаленной точкой M . Обратно, если для некоторого подмножества $\mathcal{Q}' \subset P(M)$ пересечение $\bigcap_{\delta \in \mathcal{Q}'} \mathcal{H}_\delta$ состоит из бесконечно удаленной точки, то

эта точка лежит в M , а одна из компонент связности \mathcal{S}' параболична.

Подмножество $T \subset P(M)$ называется гиперболическим, если его матрица Грама гиперболична – имеет положительный квадрат. Минимальное гиперболическое подмножество $\mathcal{L} \subset P(M)$ называется ланнеровским. Оно всегда связно и всякое его собственное подмножество является эллиптическим или связным параболическим, в последнем случае оно содержит лишь на один элемент меньше, чем \mathcal{L} . Подмножество $T \subset P(M)$ гиперболично, если и только если оно содержит ланнеровское подмножество. Отметим, что $T \subset P(M)$ не является гиперболическим, если и только если его компоненты связности эллиптичны или параболичны. Отсюда, в частности, следует, что многогранник M с острыми углами конечен в бесконечно удаленных точках.

Легко доказывается, что если многогранник M имеет острые углы, то и всякая его конечная грань обладает этим свойством. Если эта грань γ задается подмножеством $\mathcal{E} \subset P(M)$, то $P(\gamma)$ получается ортогональной проекцией вдоль \mathcal{E} тех элементов $P(M)$, которые вместе с \mathcal{E} образуют эллиптическое подмножество.

1.4°. Метод диаграмм. Серия работ автора [13], Э.Б. Винберга [6], М.Н. Прохорова [14] и А.Г. Хованского [15] была посвящена ограничению размерности пространства Лобачевского \mathcal{L} , в котором действует дискретная группа отражений с фундаментальным многогранником M конечного объема. Было показано, что $\dim \mathcal{L} < 996$. Как показывает анализ этих работ (в особенности см. [14]), на самом деле в этих работах было доказано некоторое утверждение, относящееся к произвольным эллиптическим многогранникам M с острыми углами в пространстве Лобачевского,

применение которого к фундаментальным многогранникам групп отражений дает искомый результат. (Для групп отражений \mathcal{M} эллиптичен и его двугранные углы имеют вид π/n , где n натурально и $n \geq 2$).

Лемма 1.4.1. Пусть \mathcal{M} -выпуклый эллиптический многогранник с острыми углами в пространстве Лобачевского \mathcal{L} и для некоторых констант d, C_1, C_2 выполнены условия:

а) диаметр любого ланнеровского подграфа $\mathcal{L} \subset \Gamma(\mathcal{M})$ не больше d ;

б) для всякого эллиптического подграфа $\mathcal{E} \subset \Gamma(\mathcal{M})$ из n вершин число пар (неупорядоченных) его вершин на расстояниях ρ , где $1 \leq \rho \leq d-1$, не превосходит $C_1 n$, число пар его вершин на расстояниях ρ , где $d \leq \rho \leq 2d-1$, не превосходит $C_2 n$.

Тогда $\dim \mathcal{L} < 96(C_1 + C_2/3) + 68$.

Для групп отражений $d=8, C_1=7, C_2=8$, и мы получаем искомую оценку: $\dim \mathcal{L} < 996$.

Пользуясь леммами 1.2.1 и 1.2.2, это утверждение сразу же обобщается на параболические и гиперболические многогранники. Для этого ^{для} графа Γ , подмножества Q его вершин и вершин v_1, v_2 графа Γ , не принадлежащих Q , введем расстояние

$$\rho_Q(v_1, v_2) = \min \left\{ \min_S (\rho(S) - \#(S \cap Q)), + \infty \right\},$$

где S - путь в Γ , соединяющий v_1 и v_2 , ρ - его длина, $\#(S \cap Q)$ - число вершин пути S , содержащихся в Q .

Лемма 1.4.2. Пусть \mathcal{M} - выпуклый параболический многогранник с острыми углами в пространстве Лобачевского \mathcal{L} , пусть грань γ , существование которой дает лемма 1.2.1, задается

вершиной $e \in P(M)$ и для некоторых констант d, C_1, C_2 выполнены условия:

а) диаметр любого ланнеровского подграфа $Z \subset \Gamma(M)$ не больше d ;

б) для всякого эллиптического подграфа $E \subset \Gamma(M)$, содержащего $n+1$ вершину, одна из которых есть e , число пар (неупорядоченных) его вершин, отличных от e и на расстояниях ρ_e , где $1 \leq \rho_e \leq d-1$, не превосходит $C_1 n$, а число пар его вершин, отличных от e и на расстояниях ρ_e , где $d \leq \rho_e \leq 2d-1$, не превосходит $C_2 n$.

Тогда $\dim Z < 96(C_1 + C_2/3) + 69$.

Лемма 1.4.3. Пусть M -выпуклый многогранник с острыми углами, гиперболический относительно подпространства $\mathcal{T} \subset Z$, пусть грань δ , существование которой дает лемма 1.2.2, задается эллиптическим подмножеством $Q \subset P(M)$ ($\# Q \leq \dim \mathcal{T}$) и для некоторых констант d, C_1, C_2 выполнены условия:

а) диаметр любого ланнеровского подграфа $Z \subset \Gamma(M)$ не больше d ;

б) для всякого эллиптического подграфа $E \subset \Gamma(M)$, содержащего $n + (\# Q)$ вершин и все вершины из Q , число пар (неупорядоченных) его вершин, отличных от вершин Q и на расстояниях ρ_Q , где $1 \leq \rho_Q \leq d-1$, не превосходит $C_1 n$, а число пар его вершин, отличных от вершин Q и на расстояниях ρ_Q , где $d \leq \rho_Q \leq 2d-1$, не превосходит $C_2 n$.

Тогда

$$\dim Z < 96(C_1 + C_2/3) + 68 + \dim \mathcal{T}.$$

Доказательство лемм 1.4.2 и 1.4.3. Во-первых, заметим, что при ортогональной проекции элемента a вдоль e , где $e^2 < 0$, его образ a' задается формулой

$$a' = a - e(e \cdot a)/e^2. \quad (4.1)$$

Отсюда для ортогональных проекций a', b' элементов a, b вдоль e получаем формулу:

$$a' \cdot b' = a \cdot b + (e \cdot a)(e \cdot b)/(-e^2). \quad (4.2)$$

Во-вторых, заметим, что если $Q \subset P(\gamma)$ — эллиптическое подмножество, то при ортогональной проекции вдоль Q подмножества $U \subset P(\gamma)$, содержащего Q , его образ U' будет эллиптичен, параболичен, гиперболичен, если и только если само U соответственно эллиплично, параболично, гиперболично. Если U — связное эллиптическое, связное параболическое, ланнеровское, то таким же соответственно будет и U' (нужно воспользоваться (4.2)).

Пусть теперь для леммы 1.4.2 $L' \subset P(\gamma)$ — ланнеровское подмножество и L гиперболическое подмножество в $P(M)$, содержащее e , проекцией которого вдоль e получается L' . Из ланнеровости L' вытекает, что для $v \in L$ и $v \neq e$ подмножество $L - \{v\}$ не является гиперболическим. Поэтому, если $L - \{e\}$ не гиперболическое, то L ланнеровское и из формулы (4.1) следует, что $\text{diam } L' \leq \text{diam } L \leq d$. Если же $L - \{e\}$ гиперболично, то предыдущее рассуждение показывает, что $L - \{e\}$ ланнеровское, и формула (4.2) показывает, что $\text{diam } L' \leq \text{diam } (L - \{e\}) \leq d$.

Это доказывает, что условие а) леммы 1.4.2 влечет условие

а) леммы 1.4.1 для грани γ . В лемме 1.4.3 верно то же самое, если это рассуждение повторить $\# Q$ раз.

Пусть теперь $\mathcal{E}' \subset P(\gamma)$ — связанное эллиптическое подмножество и \mathcal{E} — эллиптическое подмножество в $P(M)$, содержащее Q (в лемме 1.4.2 полагаем $Q = \{e\}$) и такое, что ортогональной проекцией его вдоль Q получается \mathcal{E}' . Тогда при проекции вершины \mathcal{E}' отождествляются с вершинами $\mathcal{E} - Q$ и по формуле (4.2) расстояние ρ между ними в \mathcal{E}' отождествляется с расстоянием ρ_Q в \mathcal{E} . Таким образом, условия б) в леммах 1.4.2 и 1.4.3 эквивалентны условию б) леммы 1.4.1 для грани γ .

Остается заметить, что в лемме 1.4.2 $\dim \gamma = \dim L - 1$, а в лемме 1.4.3 $\dim L - \dim \mathcal{T} \leq \dim \gamma$. Поэтому из леммы 1.4.1, примененной к γ , получаем утверждения лемм 1.4.2 и 1.4.3. ►

§ 2. Группы отражений в пространствах Лобачевского и метод диаграмм.

Пусть G - дискретная кристаллографическая (т.е. с фундаментальной областью конечного объема) дискретная группа в пространстве Лобачевского \mathcal{L} , $W \triangleleft G$ - ее подгруппа отражений, порожденная всеми отражениями (относительно гиперплоскостей), содержащимися в G . Выберем фундаментальный многогранник M для W . Тогда факторгруппа $A = G/W$ отождествляется с группой симметрий из G фундаментального многогранника M :

$$A = \{ g \in G \mid g(M) = M \}.$$

В частности, имеет место разложение в полупрямое произведение $G = W \rtimes A$. Следуя [26, 3°], группа G называется обобщенной кристаллографической группой отражений, если A имеет подгруппу конечного индекса A' , имеющую нетривиальное инвариантное пространство $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, включая случай, когда \mathcal{L}' - это бесконечно удаленная точка \mathcal{L} . Нетривиальность \mathcal{L}' означает, что $\mathcal{L}' \neq \emptyset$ и $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$.

Имеет место следующее простое утверждение:

Предложение 2.1. Если G - обобщенная кристаллографическая группа отражений в пространстве Лобачевского, то найдется подгруппа $A' \subset A$ конечного индекса такая, что A' оставляет инвариантным нетривиальное подпространство $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$, причем \mathcal{T} порождается $\mathcal{T} \cap M$.

Доказательство. Если A конечна, то в качестве \mathcal{T} можно взять любую точку M .

Пусть A бесконечна и $A' \subset A$ — подгруппа конечного индекса, оставляющая инвариантным нетривиальное подпространство $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$. Выберем конечную точку $m \in M$. В силу бесконечности и дискретности A' найдется последовательность элементов a_1, \dots, a_n, \dots из A' такая, что последовательность точек $a_1(m), \dots, a_n(m), \dots$ стремится к бесконечно удаленной точке $\mathcal{P} \in M \cap \mathcal{L}_\infty$. Если \mathcal{L}' — бесконечно удаленная точка \mathcal{L} , то, очевидно $\mathcal{P} = \mathcal{L}'$. Если \mathcal{L}' не является бесконечно удаленной точкой, то расстояния $\rho(\mathcal{L}', a_i(m))$ постоянны. Отсюда следует, что $\mathcal{P} \in \overline{\mathcal{L}'}$. Таким образом, в любом случае $\mathcal{P} \in M \cap \overline{\mathcal{L}'}$ и пересечение $M \cap \overline{\mathcal{L}'} \neq \emptyset$. В качестве \mathcal{T} следует взять линейную оболочку $[M \cap \overline{\mathcal{L}'}]$. \blacktriangleright

Пользуясь продолжением 2.1, мы можем разбить обобщенные кристаллографические группы отражений G на следующие три типа. Если для группы G в качестве подпространства \mathcal{T} в предложении можно взять конечную точку $\mathcal{P} \in M$, то G называется эллиптической. Если в предложении 2.1 для группы G в качестве подпространства \mathcal{T} можно взять бесконечно удаленную точку $\mathcal{P} \in M \cap \mathcal{L}_\infty$, то G называется параболической относительно \mathcal{P} . Если в предложении 2.1 для группы G $0 < \dim \mathcal{T} < \dim \mathcal{L}$, то G называется гиперболической относительно подпространства \mathcal{T} .

Это деление на типы оправдано следующими свойствами фундаментального многогранника M для W .

Предложение 2.2. Пусть G — обобщенная кристаллографическая группа отражений в пространстве Лобачевского.

Тогда

а) Если G эллиптическая, то фундаментальный многогранник M эллиптичен.

б) Если G параболическая относительно точки

$\mathcal{S} \in M \cap \mathcal{L}_\infty$, то M параболичесок относительно \mathcal{S} .

в) Если G гиперболическая относительно подпространства \mathcal{T} , то M гиперболичесок относительно \mathcal{T} .

Доказательство. Переходя к подгруппе $G' = W \rtimes A' \subset G$, $A' \subset A$, конечного индекса, будем считать, что подгруппа A переводит подпространство $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ предложения 2.1 в себя, причем в случае а) подгруппа A тривиальна и $G = W$.

Воспользуемся тем, что для дискретной кристаллографической группы G в пространстве Лобачевского можно выбрать фундаментальную область \mathcal{D} , которая, является замкнутым выпуклым многогранником с конечным числом граней (т.е. эллиптическим многогранником) в пространстве Лобачевского (см., например, [27]). При этом, очевидно, \mathcal{D} лежит в одном из фундаментальных многогранников для группы W . Заменяя \mathcal{D} на $w\mathcal{D}$, где $w \in W$, можно считать, что $\mathcal{D} = M$.

В случае а) получаем, что $\mathcal{D} = M$ - эллиптический многогранник.

В случае б) простые стандартные рассуждения показывают, что $\mathcal{D} = C_N \cap M$, где $N \subset \mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ - выпуклый замкнутый многогранник на орисфере $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$, C_N - конус над N с вершиной \mathcal{S} . При этом $\alpha(\mathcal{D}) = C_{\alpha(N)} \cap M$, если $\alpha \in A$, поскольку $\alpha(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, если $\alpha \in A$.
Очевидно,

$$\bigcup_{\alpha \in A} \alpha(N) = \{ \mathcal{E} x \mid x \in M - \{ \mathcal{E} \} \} = \\ = \bigcap_{\substack{\delta \in P(M), \\ \mathcal{E} \in \mathcal{H}_\delta}} \mathcal{H}_\delta^+ = M_{\mathcal{E}}$$

- выпуклый многогранник с конечным числом граней на орисфере.

Пусть теперь $K \subset \mathcal{E}_{\mathcal{E}}$ - произвольный выпуклый замкнутый многогранник на орисфере. Тогда, если пересечение многогранников $K \cap M_{\mathcal{E}}$ вырождено, то, очевидно, и многогранник

$C_K \cap M$ вырожден. Если пересечение многогранников $K \cap M_{\mathcal{E}}$ невырождено, выпуклый замкнутый многогранник $K \cap M_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{E}}$

лежит в конечном числе выпуклых замкнутых многогранников αN , $\alpha \in \mathcal{O}$, где $\mathcal{O} \subset A$ - некоторое конечное подмножество.

Отсюда следует, что многогранник $C_K \cap M = C_{K \cap M_{\mathcal{E}}} \cap M$ лежит в конечном числе эллиптических многогранников $C_{\alpha N} \cap M$, где $\alpha \in \mathcal{O}$.

Поэтому многогранник $C_K \cap M$ сам эллиптивен. Это доказывает, что многогранник M параболичесен относительно точки \mathcal{E} .

В случае б) простые рассуждения показывают, что

$$\mathcal{E} = C_N \cap M, \text{ где } N \subset M_{\mathcal{E}} = M \cap \mathcal{T} \text{ и } N -$$

невырожденный эллиптический многогранник в \mathcal{T} . При этом

$$\alpha(\mathcal{E}) = C_{\alpha(N)} \cap M, \text{ если } \alpha \in A, \text{ и}$$

$\bigcap_{\alpha \in A} \alpha(N) = M_{\mathcal{E}}$. Если $K \subset \mathcal{T}$ - эллиптический компактный многогранник, то $C_K \cap M$ вырожден, если $K \cap M -$

вырожденный многогранник. Если $K \cap M_{\mathcal{E}}$ - невырожденный многогранник, то он лежит в конечном числе эллиптических мно-

гранников $\alpha(N)$, $\alpha \in \mathcal{O}$, где $\mathcal{O} \subset A$ - конечное подмножество. Поэтому многогранник $C_K \cap M = C_{K \cap M_{\mathcal{E}}} \cap M$

лежит в конечном числе эллиптических многогранников

$C_{\alpha(N)} \cap M$, $\alpha \in \mathcal{O}$, и сам эллиптивен. Поэтому M гиперболичесен относительно \mathcal{T} . \blacktriangleright

Из лемм 1.4.1 - 1.4.3 и предложения 2.2 получаем следующую теорему, оценка а) которой получена М.Н.Прохоровым [14] и А.Г.Хованским [15].

Теорема 2.3. Пусть G - обобщенная дискретная кристаллографическая группа отражений в пространстве Лобачевского \mathcal{L} .

Тогда

а) если G эллиптическая, то $\dim \mathcal{L} < 996$ (оценка М.Н.Прохорова и А.Г.Хованского);

б) если G параболическая, то $\dim \mathcal{L} < 997$;

в) если G гиперболическая относительно подпространства $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$, то $\dim \mathcal{L} < 996 + \dim \mathcal{T}$.

Доказательство. Действительно, для $\Gamma(\mathcal{M})$ выполнены условия а) и б) лемм 1.4.1 - 1.4.3 с константами $d = 8$, $c_1 = 7$, $c_2 = 8$. Выполнимость условия б) вытекает из того, что связанные эллиптические подграфы $\Gamma(\mathcal{M})$ имеют форму A_n , D_m или E_k где $k = 6, 7, 8$. \blacktriangleright

Замечание 2.4. В связи с утверждением в) теоремы 2.3 отметим, что нам не известно, существует ли в гиперболическом случае абсолютная оценка $\dim \mathcal{L}$, не зависящая от $\dim \mathcal{T}$.

§ 3. Метод диаграмм и алгебраические поверхности.

Пусть Y - неособая алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем и $NS(Y)$ - ее решетка Нерона-Севери. По теореме Ходжа об индексе решетка $NS(Y)$ гиперболична и определяет пространство Лобачевского

$$\mathcal{L}(Y) = V^+(Y)/\mathbb{R}^+, \text{ где } V(Y) = \{x \in NS(Y) \otimes \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$$

и $V^+(Y)$ - пола конуса $V(Y)$, содержащая класс поляризации Y .

Напомним, что кривая G на Y называется исключительной, если G неприводима и $G^2 < 0$. Пусть $Exc(Y) \subset NS(Y)$ - множество классов исключительных кривых и

$\mathcal{M}(Y) = \bigcap_{\delta \in Exc(Y)} \mathcal{H}_{\delta}^+$ - выпуклый многогранник с острыми углами в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}(Y)$, для которого $P(\mathcal{M}(Y)) = Exc(Y)$. Многогранник $\mathcal{M}(Y)$ - многогранник с острыми углами, так как $\delta \cdot \delta' \geq 0$, если $\delta, \delta' \in Exc(Y)$ и $\delta \neq \delta'$.

Метод диаграмм - т.е. леммы 1.4.1 - 1.4.3 - применим к многограннику $\mathcal{M}(Y)$ (и поверхности Y), если многогранник $\mathcal{M}(Y)$ в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}(Y)$ локально конечен и является эллиптическим, параболическим или гиперболическим. Ниже мы рассматриваем важный случай, когда эти условия выполнены.

Напомним, что конечная линейная комбинация $D = \sum_i a_i C_i$, где C_i - неприводимые кривые на Y , называется дивизором, \mathbb{Q} - дивизором, \mathbb{R} - дивизором, если $a_i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ соответственно. \mathbb{R} - дивизор $D = \sum_i a_i C_i$ называется эффективным, если $a_i \geq 0$. \mathbb{R} - дивизор D называется числен-

но эффективным (*nef*), если $D \cdot C \geq 0$ для любого эффективного дивизора C . \mathbb{R} -дивизор D называется псевдоэффективным, если $D \cdot C \geq 0$ для любого численно эффективного дивизора C (для этого достаточно требовать, чтобы $D \cdot C \geq 0$ для любой неприводимой кривой C с квадратом $C^2 \geq 0$). То же самое определение дается для классов дивизоров в $N(Y) = NS(Y) \otimes \mathbb{R}$.

Напомним определение тех же понятий в терминах конуса Мори. Пусть $NE(Y) \subset N(Y)$ - выпуклый конус всех классов эффективных \mathbb{R} -дивизоров на Y . Его замыкание $\overline{NE}(Y)$ в $N(Y)$ состоит в точности из классов всех псевдоэффективных \mathbb{R} -дивизоров. Он называется конусом Мори. Двойственный конус $\overline{NE}(Y)^* \subset N(Y)$ (относительно индекса пересечения в $N(Y)$) состоит в точности из всех классов численно эффективных \mathbb{R} -дивизоров. Отметим, что при этом

$$\mathcal{M}(Y) = \overline{NE}(Y)^* / \mathbb{R}^+.$$

Напомним понятие разложения Зариского дивизора и его свойства (см. [31], [28]). Пусть D - псевдоэффективный \mathbb{Q} -дивизор на Y . Тогда он обладает разложением Зариского (в $N(Y)$):

$$D \equiv P + N, \quad (1)$$

где

- i) P - численно эффективный \mathbb{Q} -дивизор;
- ii) $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и $\alpha_i > 0$, F_1, \dots, F_n - неприводимые кривые, имеющие отрицательно определенную матрицу пересечений $(F_i \cdot F_j)$, $1 \leq i, j \leq n$;
- iii) $P \cdot F_i = 0$ для всех F_i , $1 \leq i \leq n$. Отметим, что разложение Зариского единственно, т.е. класс P в $N(Y)$.

кривые F_i , коэффициенты α_i определены классом D в $\overline{NE}(Y)$ однозначно. Если D - эффективный \mathbb{Q} -дивизор, то P и N - также эффективные \mathbb{Q} -дивизоры и разложение Зариского имеет место на уровне \mathbb{Q} -дивизоров: $D = P + N$. С помощью разложения Зариского $D \equiv P + N$ определяется численная D -размерность $\nu(D, Y)$ пары (D, Y) для псевдоэффективного дивизора D . Если $P^2 > 0$, то $\nu(D, Y) = 2$. Если $P^2 = 0$, но $P \neq 0$ в $N(Y)$, то $\nu(D, Y) = 1$. Если $P \equiv 0$ в $N(Y)$, то $\nu(D, Y) = 0$. Если D не является псевдоэффективным, то полагают $\nu(D, Y) = -\infty$. Пусть K - канонический класс дивизоров на Y . Тогда $\nu(K, Y)$ называется численной кодаировой размерностью Y , а $\nu(-K, Y)$ - численной антикодаировой размерностью Y .

С помощью теории Мори [23] докажем

Предложение 3.1. Пусть Y - неособая алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем, для которой $K \neq 0$, численная антикодаирова размерность $\nu(-K, Y) \geq 0$ и $-K \equiv P + N$, где $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$ - разложение Зариского для $-K$. Тогда:

а) Все исключительные кривые на Y - это кривые F_1, \dots, F_n , неособые рациональные кривые с квадратом (-2) и исключительные кривые 1-го рода. При этом $\mathcal{M}(Y)$ локально конечен.

б) Если $\nu(-K, Y) = 2$ (т.е. $P^2 > 0$), то $\mathcal{M}(Y)$ эллиптически и $\mathbb{R}^+P \in \mathcal{M}(Y)$

в) Если $\nu(-K, Y) = 1$ (т.е. $P^2 = 0$, но $P \neq 0$), то $\mathcal{M}(Y)$ параболически относительно точки $\mathcal{S} = \mathbb{R}^+P \in \mathcal{M}(Y)$.

г) Если $\nu(-K, Y) = 0$ (т.е. $P \equiv 0$), то $\mathcal{M}(Y)$ гиперболичесен относительно подпространства $\mathcal{S} = \bigcap_i \mathcal{H}_{F_i}$ коразмерности n в $\mathcal{L}(Y)$.

Доказательство. а) Пусть L -исключительная кривая на Y и L отлична от F_1, \dots, F_n . Тогда арифметический род $\rho_a(Y) = (L^2 + L \cdot K) / 2 + 1 \geq 0$. Если L отлична от F_1, \dots, F_n , то $L \cdot K = -L \cdot P - L \cdot N \leq 0$. Из этих двух неравенств для L^2 и $L \cdot K$ получаем следующие две возможности: $L^2 = -2$ и $L \cdot K = 0$, $L^2 = L \cdot K = -1$. В обоих случаях $\rho_a(L) = 0$ и L - неособая рациональная кривая. Это доказывает первое утверждение из а).

В пространстве $\mathcal{L}(Y)$ элементы $\delta \in NS(Y)$ с квадратом -1 и -2 определяют гиперплоскости \mathcal{H}_δ , отражения \mathcal{S}_δ относительно которых дают в $\mathcal{L}(Y)$ дискретную группу отражений (так как отражения \mathcal{S}_δ индуцируются автоморфизмами решетки $NS(Y)$, группа автоморфизмов которой дискретна в $\mathcal{L}(Y)$). Поэтому гиперплоскости \mathcal{H}_δ , где $\delta \in NS(Y)$ и $\delta^2 = -1$ или -2 , расположены в $\mathcal{L}(Y)$ локально конечно. Гиперплоскостей $\mathcal{H}_{F_1}, \dots, \mathcal{H}_{F_n}$ (ортогональных F_1, \dots, F_n) конечное число. Это доказывает, что $\mathcal{M}(Y)$ локально конечен, так как для $f \in P(\mathcal{M}(Y))$ либо $f^2 = -1, -2$, либо $f = F_i$.

Докажем б), в) и г). Если $\rho(Y) = \text{rk } NS(Y) = 1$ или 2 , то $\mathcal{L}(Y)$ одномерно и $\mathcal{M}(Y)$ очевидно эллиптически.

Предположим, что $\rho(Y) \geq 3$.

Пусть $\overline{NE}_+(Y) = \{x \in \overline{NE}(Y) \mid x \cdot K < 0\}$ -

положительная часть конуса Мори $\overline{NE}(Y)$. Тогда в силу теории Мори [23] проективизация $P\overline{NE}_+(Y) = \overline{NE}_+(Y) / \mathbb{R}^+$

локально полиэдральна и имеет своими вершинами (экстремальными лучами) в точности лучи $\mathbb{R}^+ E$, натянутые на исключительные кривые первого рода. Где точка проективизации PC конуса C называется вершиной PC (или экстремальным лучом), если она не лежит внутри отрезка, лежащего в PC .

Второе важнейшее свойство, вытекающее из теоремы Римана-Роха для поверхности Y , заключается в том, что $\overline{NE}(Y) \supset \overline{V^+}(Y)$. Пусть $P\overline{NE}(Y) = (\overline{NE}(Y) - \{0\}) / \mathbb{R}^+$ - проективизация конуса Мори. Тогда из вложения $\overline{NE}(Y) \supset \overline{V^+}(Y)$ и очевидного равенства $\overline{V^+}(Y)^* = \overline{V^+}(Y)$ получаем последовательность вложений проективизаций замкнутых конусов:

$$M(Y) \subset \overline{L}(Y) \subset P\overline{NE}(Y), \quad (2)$$

которая самодвойственна, т.е.

$$M(Y)^* = P\overline{NE}(Y), \quad P\overline{NE}(Y)^* = M(Y) \text{ и } \overline{L}(Y)^* = \overline{L}(Y). \quad (3)$$

Из приведенных фактов получаем следующее свойство полиэдральности $M(Y)$:

Лемма 3.2. Если $rk NS(Y) \geq 3$ и точка $Q \in \overline{L}(Y)_\infty \cap M(Y) \cap P\overline{NE}_+(Y)$, то никакая открытая окрестность точки Q в бесконечно удаленной сфере $\overline{L}(Y)_\infty$ не лежит в $M(Y)$.

Доказательство. Пусть $U \subset \overline{L}(Y)_\infty$ - открытая окрестность точки Q , лежащая в $M(Y)$. Так как $Q \in P\overline{NE}_+(Y)$, то, при необходимости уменьшая U , можно считать, что U лежит в $P\overline{NE}_+(Y)$. Прежде всего заметим, что U

лежит на границе $P\overline{NE}_+(Y)$. Действительно, пусть $\mathbb{R}^+c \in U$, где $c \in NS(Y) \otimes \mathbb{R}$, $c^2 = 0$ и $c \neq 0$. Так как $P\overline{NE}(Y) = \mathcal{M}(Y)^*$ и $\mathbb{R}^+c \in \mathcal{M}(Y)$, то $P\overline{NE}_+(Y) \subset P\overline{NE}(Y) \subset \overline{\mathcal{H}}_c^+$, где

$$\overline{\mathcal{H}}_c^+ = \{ \mathbb{R}^+x \mid x \in NS(Y) \otimes \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ и } x \cdot c \geq 0 \}$$

- проективизация полупространства в $NS(Y) \otimes \mathbb{R}$. Точка \mathbb{R}^+c лежит на границе $\overline{\mathcal{H}}_c^+$, так как $c \cdot c = c^2 = 0$, поэтому точка \mathbb{R}^+c лежит и на границе $P\overline{NE}(Y)$ и $P\overline{NE}_+(Y)$. Итак, все точки U лежат на границе $P\overline{NE}_+(Y)$. Из строгой выпуклости сферы $\mathcal{L}(Y)_\infty$ в проективизации $P(NS(Y) \otimes \mathbb{R})$ вытекает, что тогда каждая точка U является вершиной (или экстремальным лучом) в $P\overline{NE}_+(Y)$. Это противоречит теории Мори, т.е. наше предположение о том, что U лежит в $\mathcal{M}(Y)$ было не верно. ►

Докажем теперь утверждения б), в) и г) предложения 3.1. В силу а) $Exc(Y)$ разбивается на три подмножества: $Exc(Y)_3 = \{F_1, \dots, F_n\}$; $Exc(Y)_2$, состоящее из исключительных кривых, не принадлежащих $Exc(Y)_3$ и являющихся неособыми рациональными кривыми с квадратом (-2) , $Exc(Y)_1$, состоящее из исключительных кривых 1-го рода, не принадлежащих $Exc(Y)_3$. Если $F \in Exc(Y)_2$, то $F \cdot K = F \cdot P = F \cdot F_i = 0$. Если $E \in Exc(Y)_1$, то $-E \cdot K = E \cdot (P + \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i) = 1$, причем $E \cdot P \geq 0$, $E \cdot F_i \geq 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathbb{R}^+P \in \mathcal{M}(Y)$ в случаях б) и в).

Рассмотрим случай б). Пусть $\mathbb{R}^+h \in \mathcal{M}(Y)$. Тогда

$$h \cdot K = h \cdot P + h \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i > 0, \text{ так как } h \cdot F_i \geq 0$$

и $h \cdot P > 0$, ибо $\mathbb{R}^+ h \in \overline{\mathcal{L}(Y)}$ и $\mathbb{R}^+ P \in \mathcal{L}(Y)$.

Поэтому $M(Y) \subset \overline{PNE_+(Y)}$. Далее, в этом случае

$E_{xc}(Y)_1 \cup E_{xc}(Y)_2$ конечно, так как $P \in NS(Y) \otimes \mathbb{Q}$,
 $P^2 > 0, NS(Y)$ - гиперболическая решетка, $0 \leq \delta \cdot P \leq 1$
 и $\delta^2 = -1$ или 2 для $\delta \in E_{xc}(Y)_1 \cup E_{xc}(Y)_2 \subset NS(Y)$.

Поэтому $E_{xc}(Y)$ конечно и многогранник $M(Y)$ ограничен конечным числом полупространств \mathcal{H}_δ^+ , $\delta \in E_{xc}(Y)$.

В этом случае, очевидно, если $M(Y)$ не эллиптивен, то найдется непустое открытое подмножество $U \subset M(Y) \cap \mathcal{L}(Y)_\infty$. Так как $M(Y) \subset \overline{PNE_+(Y)}$, то это противоречит лемме 3.2.

Рассмотрим случай в). В этом случае аналогично б) доказывается, что $M(Y) - \mathcal{P} \subset \overline{PNE_+(Y)}$, где $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ P$. Пусть

$$R = \{\delta \in E_{xc}(Y) \mid \delta \cdot P = 0\}.$$

Множество R конечно, так как $M(Y)$ конечен в бесконечно удаленной точке \mathcal{P} . Множество R содержит $\{F_1, \dots, F_n\}$, $E_{xc}(Y)_2$ и некоторое конечное подмножество элементов $E_{xc}(Y)_1$. Пусть $E_{xc}(Y)'_1 = E_{xc}(Y)_1 - R$. Пусть

$M(Y)_{\mathcal{P}} = \bigcap_{\delta \in R} \overline{\mathcal{H}_\delta^+}$. Многогранник $M(Y)_{\mathcal{P}}$ является конусом с вершиной \mathcal{P} и основанием $T = \{l \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}} \mid l \subset M(Y)_{\mathcal{P}}\}$ на орисфере $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$. Очевидно,

$M(Y) \subset M(Y)_{\mathcal{P}}$. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ - выпуклый замкнутый многогранник. Если $\mathcal{K} \cap T$ - вырожденный многогранник, то многогранник $C_{\mathcal{K}} \cap M(Y)_{\mathcal{P}} = C_{\mathcal{K} \cap T}$

вырожден. Поэтому вырожден и многогранник $C_{\mathcal{X}} \cap M(Y)$. Пусть $\mathcal{X} \cap T$ - невырожденный многогранник. Тогда многогранник

$M(Y) \cap C_{\mathcal{X}} = M(Y) \cap C_{\mathcal{X} \cap T}$ ограничен конечным числом гиперплоскостей граней многогранника $C_{\mathcal{X} \cap T}$, которые все проходят через \mathcal{S} , и гиперплоскостями $\mathcal{H}_E, E \in \text{Exc}(Y)'_1$, пересекающими конус $C_{\mathcal{X} \cap T}$ над компактным подмножеством $\mathcal{X} \cap T$ на орисфере $\mathcal{S}_{\mathcal{S}}$. При этом, так как $-E \cdot K = E \cdot P + E \cdot \sum_i d_i F_i = 1$, то $0 < E \cdot P \leq 1$, где

$P \in NS(Y) \otimes \mathbb{Q}$. Чисто арифметически, пользуясь гиперболичностью решетки $NS(Y)$, легко доказывается, что

$$\{e \in NS(Y) \mid e^2 = -1, 0 < e \cdot P \leq 1, \mathcal{H}_e \cap C_{\mathcal{X} \cap T} \neq \emptyset\}$$

конечно. Отсюда следует, что многогранник $M(Y) \cap C_{\mathcal{X} \cap T}$

ограничен конечным числом граней. Если этот многогранник не эллиптический, то очевидно найдется непустой открытый подмножество $U \subset \mathcal{L}(Y) \cap M(Y) \cap C_{\mathcal{X} \cap T}$, не содержащее \mathcal{S} . Так как $M(Y) - \{\mathcal{S}\} \subset P\overline{NE}_+(Y)$, то

это противоречит лемме 3.2. Таким образом, многогранник

$$M(Y) \cap C_{\mathcal{X}} = M(Y) \cap C_{\mathcal{X} \cap T} \text{ эллиптический.}$$

Докажем г). Пусть $\mathcal{T} = M(Y) \cap \overline{\mathcal{S}}$. Так как $M(Y)$ - локально конечный многогранник с острыми углами и

$$P(M(Y)) = \text{Exc}(Y), \text{ так как } \{F_1, \dots, F_n\} = \text{Exc}(Y)_3 \subset \text{Exc}(Y) \text{ и матрица Грама элементов } \text{Exc}(Y)_3 \text{ отрицательно определена, то}$$

$$\mathcal{T} \cap \left(\bigcap_{F \in \text{Exc}(Y)_3} \mathcal{H}_F \right) \subset \mathcal{L}(Y) \text{ - подпространство}$$

коразмерности n , причем $\gamma = \overline{\mathcal{T}} \cap \mathcal{M}(Y)$ -

это грань $\mathcal{M}(Y)$ коразмерности n . Далее,

$\mathcal{M}(Y) - \gamma \subset \text{PNE}_+(Y)$, поскольку для $\mathbb{R}^+ h \in \mathcal{M}(Y) - \gamma$

имеем: $h \cdot F_i > 0$ и $\sum \alpha_i F_i = -K$, где

$\alpha_i > 0$. Для исключительных кривых $E \in \text{Exc}(Y)_2$

из того, что $E \cdot K = 0$, $E \notin \text{Exc}(Y)_3$ и

$-K = \sum \alpha_i F_i$, где $\alpha_i > 0$, следует, что

$E \cdot \text{Exc}(Y)_3 \equiv 0$. Поэтому гиперплоскости \mathcal{H}_E ,

$E \in \text{Exc}(Y)_2$, ортогональны подпространству \mathcal{T} . От-
сюда следует, что если $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ - эллиптический огра-

ниченный многогранник в \mathcal{T} и $S_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{M}(Y)$ - невырож-

денный многогранник, то многогранник $S_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{M}(Y)$ огра-

ничен лишь конечным числом гиперплоскостей \mathcal{H}_E ,

$E \in \text{Exc}(Y)_3 \cup \text{Exc}(Y)_2$. Пусть $E \in \text{Exc}(Y)_1$. Тогда

$$1 = (-K) \cdot E = \sum_{i=1}^n \alpha_i (E \cdot F_i),$$

где α_i - рациональные положительные числа и $E \cdot F_i \geq 0$.

Отсюда следует, что для всех $1 \leq i \leq n$ имеем:

$0 \leq E \cdot F_i \leq N$, где N - некоторая констан-

та, зависящая лишь от α_i . Чисто арифметически, пользуясь

гиперболичностью решетки $NS(Y)$, легко доказывается,

что множество

$$\left\{ e \in NS(Y) \mid e^2 = -1, 0 \leq e \cdot F_i \leq N \text{ для} \right. \\ \left. \text{всех } 1 \leq i \leq n \text{ и } \mathcal{H}_e \cap S_{\mathcal{K}} \neq \emptyset \right\}$$

конечно. Поэтому

многогранник $C_X \cap M(Y)$ ограничен лишь конечным числом граней $\mathcal{H}_E, E \in \text{Exc}(Y)$. В результате мы получаем, что многогранник $C_X \cap M(Y)$ ограничен конечным числом гиперплоскостей. Поэтому, если данный многогранник не эллипти-

чен, то найдется открытое подмножество $\mathcal{D} \subset C_X \cap M(Y) \cap \mathcal{L}(Y)_\infty$. По построению, многогранник $C_X \cap M(Y)$ эллиптичен в окрестности $\overline{\mathcal{T}}$. Поэтому $\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{T}} = \emptyset$. Так как $M(Y) - M(Y) \cap \overline{\mathcal{T}} \subset \overline{NE}(Y)$, то отсюда следует, что $\mathcal{D} \subset \overline{NE}(Y)$ и

$\mathcal{D} \subset M(Y) \cap \overline{NE}(Y) \cap \mathcal{L}(Y)_\infty$. Это противоречит

лемме 3.2, что доказывает эллиптичность многогранника

$M(Y) \cap C_X$: Теорема доказана. ►

Приведем важное следствие предложения 3.1, описывающее весь конус Мори $\overline{NE}(Y)$.

Напомним, что луч $l = \mathbb{R}^+ \delta \subset \overline{NE}(Y)$, где $\delta \neq 0$, называется экстремальным, если из записи $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где

$\delta_1, \delta_2 \in \overline{NE}(Y) - \{0\}$ следует, что

$\delta_1 \in \mathbb{R}^+ \delta$ и $\delta_2 \in \mathbb{R}^+ \delta$. Очевидно, конус Мори

$\overline{NE}(Y)$ порожден своими экстремальными лучами, т.е. для всякого $0 \neq h \in \overline{NE}(Y)$ имеем: $h = \delta_1 + \dots + \delta_k$,

где $\mathbb{R}^+ \delta_i$ - экстремальные лучи. На языке двойственного конуса $\mathbb{R}^+ M(Y)$, луч $\mathbb{R}^+ \delta$ экстремален, если и только

если гиперплоскость \mathcal{H}_δ является экстремальной опорной для $M(Y)$, т.е. полупространство

$$\mathcal{H}_\delta^+ = \{ \mathbb{R}^+ x \subset NS(Y) \otimes \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ и } \delta \cdot x \geq 0 \}$$

содержит $M(Y)$ и не существует таких полупространств $\mathcal{H}_{\delta_1}^+$ и $\mathcal{H}_{\delta_2}^+$, отличных от \mathcal{H}_{δ}^+ , что оба они содержат $M(Y)$ и

$$\mathcal{H}_{\delta_1}^+ \cap \mathcal{H}_{\delta_2}^+ \subset \mathcal{H}_{\delta}^+ \quad \text{Отсюда и из вложения}$$

$$M(Y) \subset P\overline{V}^+(Y) \quad \text{следует, что для экстремального}$$

луча $\mathbb{R}^+\delta$ верно, что $\delta^2 \leq 0$. Из предложения 3.2, пользуясь описанием экстремальных лучей как экстремальных опорных гиперплоскостей для $M(Y)$, получаем

Следствие 3.3. Для неособой проективной алгебраической поверхности Y многогранник Мори $\overline{NE}(Y)$ порожден экстремальными лучами $\mathbb{R}^+\delta$, где $\delta^2 \leq 0$. Если канонический класс $K \neq 0$, численная антикодайрова размерность $\nu(-K, Y) \geq 0$ и $-K \equiv P + N$, где $N = \sum_{i=1}^n d_i F_i$ - разложение Зариского для $-K$, то имеют место утверждения:

а) Экстремальные лучи $\mathbb{R}^+\delta$, где $\delta^2 < 0$, - это в точности лучи вида \mathbb{R}^+E , где E пробегает все множество $\text{Exc}(Y)$ исключительных кривых на Y .

б) Если $\nu(-K, Y) = 2$ (т.е. $P^2 > 0$), то экстремальных лучей вида \mathbb{R}^+c , где $c^2 = 0$, не существует и $\overline{NE}(Y)$ порожден $\text{Exc}(Y)$

в) Если $\nu(-K, Y) = 1$ (т.е. $P^2 = 0$, но $P \neq 0$), то возможен единственный экстремальный луч вида \mathbb{R}^+c , где $c^2 = 0$: это луч \mathbb{R}^+P . Он является экстремальным, если и только если P не представляется в виде

$$P = \sum_{j=1}^m \alpha_j E_j, \quad \text{где } \alpha_j > 0 \text{ и } E_j \in \text{Exc}(Y).$$

В любом случае $\overline{NE}(Y)$ порожден $\text{Exc}(Y) \cup \{P\}$.

г) Если $\nu(-K, Y) = 0$ (т.е. $P \equiv 0$), то для всякого экстремального луча вида \mathbb{R}^+c , где $c^2 = 0$,

имеем: $\mathbb{R}^+ c \in \mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{T}$, т.е. c численно эффективен и $c \cdot F_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Такой луч экстремален, если и только если c не представляется в виде $c = \sum_{j=1}^m a_j E_j$, где $a_j > 0$ и $E_j \in \text{Exc}(Y)$. В любом случае $\overline{NE}(Y)$ порожден $\text{Exc}(Y) \cup \mathbb{R}^+(\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{L}(Y)_\infty)$.

Для дальнейшего важнейшим для нас является следующее: Предложение 3.1 показывает, что к многограннику $\mathcal{M}(Y)$ в $\mathcal{L}(Y)$ и $P(\mathcal{M}(Y)) = \text{Exc}(Y)$ применимы леммы 1.4.1 – 1.4.3, если антиканонический класс $-K$ поверхности Y псевдоэффективен. Переформулировка этих лемм для Y является рутинным занятием, но мы все же это сделаем для удобства читателя. Отметим, что в случае $\nu(-K, Y) = 1$, когда $\mathcal{M}(Y)$ параболичен относительно P , элемент e леммы 1.4.2 соответствует исключительной кривой E 1-го рода на Y , так как $E \cdot P > 0$. А в случае $\nu(-K, Y) = 0$, когда $\mathcal{M}(Y)$ гиперболичен относительно $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{H}_{F_i}$,

подмножество \mathcal{Q} леммы 1.4.3 состоит из неособых рациональных кривых $E_1, \dots, E_m \in \text{Exc}(Y)$ с квадратом -1 или -2 , отличных от F_1, \dots, F_n , причем $m \leq \dim \mathcal{L}(Y) - n$, и лемма 1.4.3 дает оценку на число n исключительных кривых F_1, \dots, F_n .

Теорема 3.4. Пусть Y – неособая проективная алгебраическая поверхность над произвольным алгебраическим замкнутым полем и численная антиканоническая размерность $\nu(-K, Y) = 2$. Пусть для некоторых констант d, c_1, c_2 выполнены условия:

а) диаметр любого ланнеровского подграфа \mathcal{L} в графе

Грама $\Gamma(\text{Exc}(Y))$ не больше d ;

б) для всякого связанного эллиптического подграфа

$\mathcal{E} \subset \Gamma(\text{Exc}(Y))$ из n вершин число пар (неупорядоченных) его вершин на расстояниях ρ , где $1 \leq \rho \leq d-1$, не превосходит $C_1 n$, а число пар его вершин на расстояниях ρ , где $d \leq \rho \leq 2d-1$, не превосходит $C_2 n$.

Тогда $\text{rk } NS(Y) < 96(C_1 + C_2/3) + 69$.

Теорема 3.5. Пусть Y - неособая проективная алгебраическая поверхность над произвольным алгебраически замкнутым полем, численная антикодаирова размерность $\chi(-K, Y) = 1$ и $-K \equiv P + N$ - разложение Зариского для $-K$. Пусть для некоторых констант d, C_1, C_2 выполнены условия:

а) диаметр любого ланнеровского подграфа

$\mathcal{L} \subset \Gamma(\text{Exc}(Y))$ не больше d ;

б) для всякой исключительной кривой E 1-го рода, для которой $P \cdot E > 0$, и всякого связанного эллиптического подграфа $\mathcal{E} \subset \Gamma(\text{Exc}(Y))$ из $n+1$ -й вершины, одна из которых есть E , число пар его вершин, отличных от E и на расстояниях ρ_E , где $1 \leq \rho_E \leq d-1$, не превосходит $C_1 n$, а число пар его вершин на расстояниях ρ_E , где $d \leq \rho_E \leq 2d-1$, не превосходит $C_2 n$.

Тогда $\text{rk } NS(Y) < 96(C_1 + C_2/3) + 70$.

Теорема 3.6. Пусть Y - неособая проективная алгебраическая поверхность над произвольным алгебраически замкнутым полем, численная антикодаирова размерность $\chi(-K, Y) = 0$ и $-K \equiv N \equiv \sum_{i=1}^m \mathcal{L}_i F_i$ - разложение Зариского для $-K$. Пусть для некоторых констант d, C_1, C_2 выполнены условия:

а) диаметр любого ланнеровского подграфа $\mathcal{L} \subset \Gamma(\text{Exc}(Y))$ не больше d ;

б) для всякого эллиптического подмножества $Q = \{E_1, \dots, E_n\} \subset \text{Exc}(Y)$, состоящего из неособых рациональных кривых с квадратом -1 или -2 и отличных от исключительных кривых F_1, \dots, F_n , и для всякого связанного эллиптического подграфа $\mathcal{G} \subset \Gamma(\text{Exc}(Y))$, содержащего $n + (\# Q)$ вершин и все вершины из Q , число пар его вершин, отличных от вершин Q и на расстояниях ρ_Q , где $1 \leq \rho_Q \leq d-1$, не превосходит $C_1 n$, а число пар его вершин отличных от вершин Q и на расстояниях ρ_Q , где $d \leq \rho_Q \leq 2d-1$, не превосходит $C_2 n$.

Тогда $m < 96(C_1 + C_2/3) + 68$.

Замечание 3.7. По-видимому, наиболее интересно применение теорем 3.4 - 3.6 к исследованию нормальных проективных поверхностей Z с численно эффективным антиканоническим классом. (По поводу теории пересечений и определения канонического класса на нормальных поверхностях мы отсылаем читателя к работе Мамфорда [25], а также к работе Сакаи [28].)

Пусть Z - нормальная проективная алгебраическая поверхность и $\sigma: Y \rightarrow Z$ - разрешение особенностей Z . Тогда канонические классы K_Y и K_Z связаны при помощи формулы:

$$K_Y = \sigma^* K_Z + \sum_{i=1}^n d_i F_i, \quad (4)$$

где F_i - неприводимые компоненты исключительного дивизора разрешения (т.е. $\sigma(F_i)$ - точка). При этом, если σ - минимальное разрешение особенностей, т.е. ни одна из компонент F_i не является исключительной кривой 1-го рода, то $\alpha_i \leq 0$ для всех $1 \leq i \leq n$. Таким свойством обладают не только минимальные разрешения особенностей, поэтому давайте назовем разрешение особенностей почти минимальным, если в формуле (4) коэффициенты α_i не положительны. Предположим далее, что на поверхности Z антиканонический класс $-K_Z$ численно эффективен (nef). Тогда и $(-\sigma^* K_Z)$ численно эффективен, и для допустимого разрешения особенностей формула (4) дает разложение Зариского для $-K_Y$:

$$-K_Y = -\sigma^* K_Z + \sum_{i=1}^m (-\alpha_i) F_i, \quad (5)$$

где $P = -\sigma^* K_Z$ численно эффективен, $N = \sum_{i=1}^m (-\alpha_i) F_i$, где $(-\alpha_i) > 0$ и матрица Грама F_1, \dots, F_m отрицательно определена (по теореме Мамфорда [25]). Для этого мы отбрасываем в разложении (4) слагаемые $\alpha_i F_i$, $m < i \leq n$, для которых $\alpha_i = 0$. При этом, очевидно, численная антикодаирова размерность

$$\nu(-K, Y) = \begin{cases} 2, & \text{если } (K_Z)^2 > 0; \\ 1, & \text{если } (K_Z)^2 = 0 \text{ и } K_Z \neq 0 \\ 0, & \text{если } K_Z \equiv 0. \end{cases} \quad (6)$$

Применяя к поверхности Y теоремы 3.4 - 3.6, мы получаем в эллиптическом случае, когда $K_Z^2 > 0$, и параболическом случае, когда $K_Z^2 = 0$ и $K_Z \neq 0$, оценки на

$\text{rk } NS(Y)$, а в гиперболическом случае, когда $K_Z \equiv 0$,

- оценку на m - число компонент F_1, \dots, F_m . В любом случае мы получаем сильные ограничения на особенности Z , поскольку кривые F_1, \dots, F_m порождают в $NS(Y)$ отрицательно определенную подрешетку ранга m . Представляет несомненный интерес нахождение таких типов особенностей поверхностей, для которых применение теорем 3.4 - 3.6 дает нетривиальные результаты. В следующем параграфе мы покажем, что такие результаты действительно получаются для класса лог-терминальных особенностей поверхностей. На самом деле, все эти результаты имеют место и для более широкого класса - класса лог-канонических особенностей поверхностей, но мы надеемся показать это в последующих статьях - в лог-каноническом случае возникает много дополнительных диаграмм, работа с которыми неразумно увеличила бы объем настоящей статьи, не добавив новых идей.

§ 4. Проективные алгебраические поверхности с лог-терминальными особенностями и численно эффективным антиканоническим классом.

Напомним, что нормальная проективная алгебраическая поверхность Z называется поверхностью дель Пеццо, если антиканонический класс $-K_Z$ численно обилен, т.е. $-K_Z \cdot C > 0$ для всякой эффективной кривой C на Z . В этом случае $(K_Z)^2 > 0$, и этот случай соответствует эллиптическому случаю в обозначениях замечания 3.7.

Работы автора [11], [12], [13] и В.А.Алексеева [2] /см. также [26] и [3, 4]/ были посвящены поверхностям дель Пеццо Z с лог-терминальными особенностями, причем над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. В этом случае из результатов Шокурова [16] и Каваматы [22], касающихся теории Мориа для алгебраических многообразий произвольной размерности с лог-терминальными особенностями прямо следует /это было замечено В.А.Алексеевым в [3, § 1] и [4]/, что многогранник Мориа $\overline{NE}(Y)$ для минимального разрешения особенностей $\sigma: Y \rightarrow Z$ порожден множеством $Exc(Y)$. Отсюда, как было замечено автором в [11], следует эллиптичность $M(Y)$ и теорема 3.4 для таких Y . Именно это, т.е. теорема, аналогичная теореме 3.4, и использовалось в получении результатов работ автора [11], [12], [13] и позднее было использовано В.А.Алексеевым в [2].

Однако, использование теорем 3.4 — 3.6 позволяет перенести результаты этих работ на значительно более общий класс поверхностей с лог-терминальными особенностями. Во-первых, не нужно предполагать, что характеристика основного поля равна 0. Во-вторых, вместо обильности антиканонического класса $-K_Z$ достаточно требовать лишь его численную эффективность. Этому обо-

общению результатов работ [11], [12], [13] и [2] и посвящен данный параграф. Оно требует изменения формулировок и новых моментов доказательств. К сожалению, при этом мы будем постоянно ссылаться на работы [11], [12], [2], что, возможно, неудобно читателю. В будущем автор надеется дать замкнутое в себе изложение этого круга вопросов.

Как мы уже отмечали в замечании 3.7, результаты этого параграфа обобщаются на лог-канонические особенности, чему автор надеется посвятить отдельную работу.

4.1⁰. Двумерные лог-терминальные особенности. Напомним /см. [20], [16], [22], [29]/, что нормальная двумерная алгебраическая особенность (Z, z) называется лог-терминальной, если для минимального разрешения особенности $\sigma: Y \rightarrow Z$ в формуле / см. § 3, /4//

$$K_Y = \sigma^* K_Z + \sum_{i=1}^n d_i F_i \quad /1.1/$$

все числа d_i /они называются показателями особенности (Z, z) / удовлетворяют неравенству: $d_i > -1$.

Для двумерных лог-терминальных особенностей все компоненты F_i исключительного дивизора разрешения являются неособыми рациональными кривыми, лог-терминальные особенности характеризуются графом пересечений /т.е. графом Грама/ этих компонент, все эти графы - графы $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$ - известны и представлены в таблице 1 ниже. Из того, что графы $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$ являются деревьями и F_i неособы, следует, что для любого /необязательно минимального/ разрешения $\sigma: Y \rightarrow Z$ лог-терминальной особенности (Z, z) в формуле /1.1/ также для всех d_i выполнено неравенство $d_i > -1$. Поэтому в данном определении двумерных лог-терминальных особенностей вместо минимального можно рассматривать произвольное разрешение особенностей. Над полем ко-

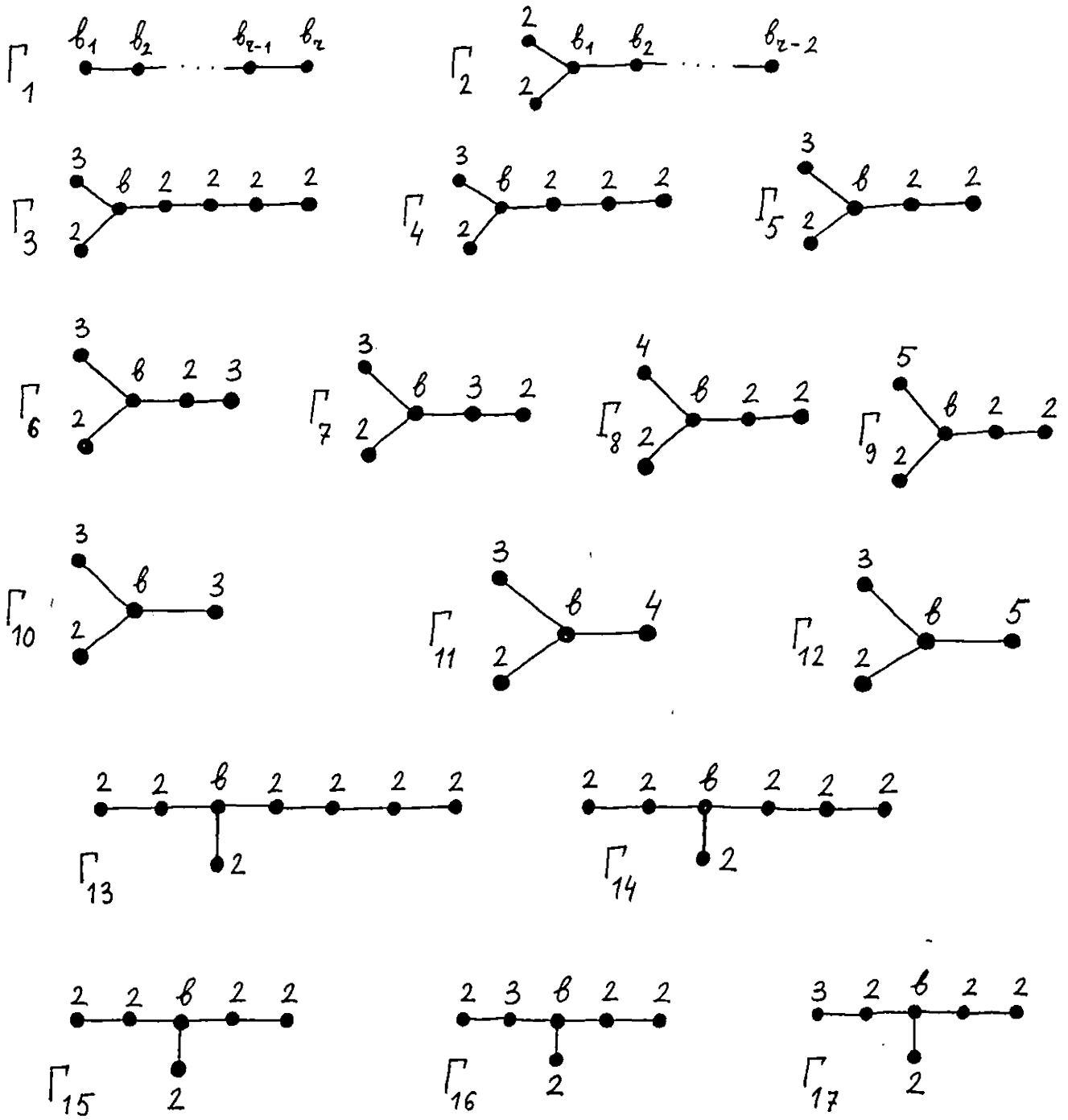


Таблица 1.

мплексных чисел \mathbb{C} двумерные лог-терминальные особенности: аналитически эквивалентны фактор-особенностям \mathbb{C}^2/G , $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ /см. [22], [8]/.

Наименьшее общее кратное $k(z)$ всех знаменателей d_i называется индексом особенности (Z, z) . Кратность $e(z)$ лог-терминальной особенности /см. [17], [20]/ задается формулой

$$e(z) = 2 + \sum_{i=1}^n (b_i - 2),$$

где $b_i = -F_i^2$. Всегда /см. [11]/ $e(z) \leq 2k(z)$.

4.2⁰. Проективные алгебраические поверхности с лог-терминальными особенностями и с nef -антиканоническим классом. Из классификации алгебраических поверхностей легко следует

Предложение 4.2.1. Пусть Z - проективная алгебраическая поверхность с лог-терминальными особенностями и с численно эффективным антиканоническим классом $-K_Z$, пусть $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z .

Тогда Y и Z имеют один из следующих трех типов:

i / $12K_Y = 0$; при этом $rk NS(Y) \leq 22$ и Z имеет лишь двойные рациональные /т.е. индекса 1, эквивалентно, кратности 2/ особые точки;

ii / Y - линейчатая поверхность над эллиптической кривой, не имеющая исключительных кривых; при этом $Z = Y$, $rk NS(Y) = 2$.

iii / Y - рациональная поверхность.

Доказательство. По формуле /1.1/ имеем:

$$-K_Y = -\sigma^* K_Z + \sum_{i=1}^n (-d_i) F_i,$$

где $-\sigma^* K_Z$ - nef и $(-d_i) \geq 0$. Отсюда следует, что $-K_Y$ псевдоэффективен, поэтому кодаирова размерность $\kappa(Y) \leq 0$.

Пусть $\kappa(Y) = 0$. Тогда K_Y псевдоеффективен, откуда следует, что все коэффициенты $\alpha_i = 0$ и $K_Y = \sigma^* K_Z \equiv 0$. Тогда Y - минимальная алгебраическая поверхность и из классификации алгебраических поверхностей следует, что $12 K_Z = 0$ /см. [18], а также [21]/. Из формулы Нётера в этом случае следует, что $\text{rk } NS(Y) \leq 2$. Из того, что все $\alpha_i = 0$, вытекает, что Z имеет лишь двойные рациональные особые точки /т. е. индекса 1, эквивалентно, кратности 2/, получающиеся стягиванием деревьев неособых рациональных кривых на Y с графом пересечений A_n, D_n или E_6, E_7, E_8 .

Пусть $\kappa(Y) < 0$ и иррегулярность $q(Y) \geq 1$. Тогда в силу классификации алгебраических поверхностей /см. [18], [30], а также [1]/ Y бирационально является линейчатой поверхностью. Существует морфизм $\varphi: Y \rightarrow C$ на кривую рода $g = q(Y) \geq 1$, общий слой которого изоморфен \mathbb{P}^1 . По предложению 3.1, а/ и 4.1⁰ все исключительные кривые на Y являются неособыми рациональными кривыми, поэтому по теореме Люрота для кривых все эти исключительные кривые лежат в слоях φ и их число конечно. Если $\text{rk } NS(Y) = 2$, то отсюда же следует, что Y - линейчатая поверхность, т. е. φ является расслоением со слоем \mathbb{P}^1 , и Y не содержит исключительных кривых. Тогда, очевидно, $Y = Z$. Покажем, что случай $\text{rk } NS(Y) \geq 3$ невозможен. В этом случае, если хотя бы для одного i коэффициент $\alpha_i < 0$, то по предложению 3.1 многогранник $M(Y)$ эллиптичен, параболический или гиперболический. Тогда из конечности числа исключительных кривых на Y следует, что $M(Y)$ эллиптичен, что невозможно, так как все грани $M(Y)$ проходят через бесконечно удаленную точку $\mathbb{R}^+ f$, где f - класс в $NS(Y)$ общего слоя φ . Поэтому все $\alpha_i = 0$ и $-K_Y = -\sigma^* K_Z$ численно эффективен, откуда

$(K_Y)^2 \geq 0$. По формуле Нётера для бирационально линейчатых поверхностей

$$(K_Y)^2 + zk NS(Y) = 10 - 8\varphi(Y),$$

откуда из условий $\varphi(Y) \geq 1$, $zk NS(Y) \geq 3$, $(K_Y)^2 \geq 0$ получаем противоречие.

Остается последняя возможность: $\varphi(Y) < 0$, $\varphi(Y) = 0$. В этом случае из классификации алгебраических поверхностей /см. [30], а также [1] / следует, что Y - рациональная поверхность.

4.3⁰. Арифметическая природа множества исключительных кривых на алгебраических поверхностях с лог-терминальными особенностями и с nef -антиканоническим классом. Мы понимаем под этим следующее предложение, являющееся простым следствием теоремы Римана-Роха, но, тем не менее, на наш взгляд, имеющее фундаментальное значение.

Предложение 4.3.1. Пусть Z - проективная алгебраическая поверхность с лог-терминальными особенностями и с численно эффективным антиканоническим классом $(-K_Z)$, пусть $\sigma: Y \rightarrow Z$ - почти минимальное разрешение особенностей, для которого

$$K_Y = \sigma^* K_Z + \sum_{i=1}^m \alpha_i F_i,$$

где F_i - неприводимые компоненты исключительного дивизора разрешения и $\alpha_i < 0$. Пусть $Exc(Y)^2$ - множество исключительных кривых на Y с квадратом -2 и отличных от F_1, \dots, F_m . Пусть $h \in NS(Y)$ - очень обильный элемент в $NS(Y)$. Пусть \mathcal{M} - содержащая $\mathbb{R}^+ h$ камера для группы $W^{(1)}(NS(Y))$, порожденной отражениями относительно всех элементов с квадратом -1 в $NS(Y)$.

Тогда:

а/ Если Y нерациональна, то Y не содержит исключительных кривых 1-го рода.

б/ Если Y рациональна, то элемент $e \in NS(Y)$ с квадратом $e^2 = -1$ эффективен /представлен эффективной кривой/, если и только если $e \cdot h > 0$. Элемент $e \in NS(Y)$ с квадратом $e^2 = -1$ является классом исключительной кривой 1-го рода на Y , если и только если \mathcal{H}_e^+ — полупространство, ограничивающее камеру \mathcal{M} , и $e \cdot F \geq 0$ для любой $F \in \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2$, если класс F отличен от e .

Доказательство. Утверждение а/ следует из предложения 4.2.1, так как в случае а/, как легко видеть, почти минимальное разрешение совпадает с минимальным.

В случае б/ по теореме Римана — Роха имеем:

$$l(e) + l(K_Y - e) \geq 1.$$

Если $e \cdot h > 0$, то $h \cdot (K_Y - e) < 0$, так как $-K_Y$ псевдоеффективен. Поэтому $l(K_Y - e) = 0$ и $l(e) \geq 1$, т.е. элемент e эффективен.

Поскольку исключительные кривые на Y исчерпываются $\{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2$ и исключительными кривыми 1-го рода, то приведенное рассуждение показывает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(Y) &= \mathcal{M} \cap \left(\bigcap_{F \in \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2} \mathcal{H}_F^+ \right) = \\ &= \left(\bigcap_{e \in P(\mathcal{M})} \mathcal{H}_e^+ \right) \cap \left(\bigcap_{F \in \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2} \mathcal{H}_F^+ \right). \quad /3.1/ \end{aligned}$$

Положим

$$P = \left\{ e \in P(\mathcal{M}) \mid e \cdot F_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \text{ если класс } F_i \text{ отличен от } e; e \cdot \text{Exc}(Y)^2 \geq 0 \right\}.$$

Так как \mathcal{M} имеет острые углы, то из /3.1/ получаем, что

$$\mathcal{M}(Y) = \left(\bigcap_{e \in P} \mathcal{H}_e^+ \right) \cap \left(\bigcap_{F \in \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2} \mathcal{H}_F^+ \right)$$

Так как $\mathcal{M}(Y)$ невырожден и для различных элементов

$$\delta, \delta' \in P \cup \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2$$

имеем $\delta \cdot \delta' \geq 0$, то из известных свойств выпуклых многогранников с острыми углами вытекает, что $P(\mathcal{M}(Y)) \equiv$

$\equiv P \cup \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2$. Это известное свойство /см. []/ заключается в том, что ортогональная проекция

$\mathcal{M}(Y)$ на любую гиперплоскость $\mathcal{H}_{\delta}, \delta, \delta \in P \cup \{F_1, \dots, F_m\} \cup \text{Exc}(Y)^2$, содержится в $\mathcal{M}(Y)$; откуда следует, что \mathcal{H}_{δ}^+ ограничивает $\mathcal{M}(Y)$. \blacktriangleright

4.4⁰. Лог-терминальные и почти дельпещовские и дельпещовские лог-терминальные системы исключительных кривых и векторов.

Пусть Z - проективная алгебраическая поверхность с лог-терминальными особенностями и $-K_Z$ численно эффективен. Пусть

$\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z .

Тогда формула /1.1/ дает:

$$K_Y = \sigma^* K_Z + \sum_{i=1}^m \alpha_i F_i, \quad /4.1/$$

где в /4.1/ мы считаем, что $-1 < \alpha_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, отбрасывая те компоненты F_j исключительного дивизора разрешения, которые имеют в формуле /1.1/ показатели $\alpha_j = 0$.

По формуле для рода кривой на поверхности элемент

$$K(F_1, \dots, F_m) = \sum_{i=1}^m \alpha_i F_i$$

определен однозначно условием

$$K(F_1, \dots, F_m) \cdot F_i = b_i - 2, \quad /4.2/$$

где $b_i = -F_i^2$ - вес F_i в графе Грама. Действительно, матрица Грама элементов F_1, \dots, F_m отрицательно определена и поэтому невырожденна.

Так как $-\sigma^* K_Z - nef$, то остальные исключительные кривые на Y являются неособыми рациональными кривыми с квадратом -2 или -1 /см. предложение 3.1/. Если $F^2 = -2$, то $F \cdot F_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. Отсюда следует, что в множестве $Exc(Y)^{\geq 2}$ исключительных кривых 2-го рода /т.е. с квадратом $F^2 \leq -2$ / подмножество исключительных кривых F_1, \dots, F_m однозначно выделяется тем условием, что это наибольшее подмножество в $Exc(Y)^{\geq 2}$, все компоненты связности графа Грама которого содержат хотя бы одну кривую с квадратом < -2 . Поэтому в $Exc(Y)^{\geq 2}$ однозначно определен условием /4.2/ элемент $K(F_1, \dots, F_m)$, и мы можем положить

$$K(Exc(Y)^{\geq 2}) \stackrel{Def}{=} K(F_1, \dots, F_m).$$

Для исключительной кривой E 1-го рода на Y из /4.1/ получаем: $-1 = E \cdot \sigma^* K_Z + E \cdot K(Exc(Y)^{\geq 2})$. Так как $-\sigma^* K_Z - nef$, то отсюда следует, что число

$$\eta(E, Exc(Y)^{\geq 2}) = E \cdot K(Exc(Y)^{\geq 2}) + 1 = E \cdot (-\sigma^* K_Z) \geq 0.$$

Это подсказывает следующее определение, немного обобщающее определение, данное в [12].

Определение 4.4.1. Система \mathcal{V} векторов не более чем гиперболического конечномерного линейного пространства над \mathbb{R} с симметрической билинейной формой называется почти дельпешовской лог-терминальной, если для всех $e, e' \in \mathcal{V}$ имеем:

$e \cdot e' \in \mathbb{Z}$, $e \cdot e' \geq 0$, если $e \neq e'$, $e^2 < 0$, /4.3/

и выполнены условия /где $\mathcal{V}^1 = \{e \in \mathcal{V} \mid e^2 = -1\}$ — вектора 1-го рода и $\mathcal{V}^{\geq 2} = \{f \in \mathcal{V} \mid f^2 \leq -2\}$ — вектора 2-го рода/:

а/ Пусть $\mathcal{V}^3 \subset \mathcal{V}^{\geq 2}$ является объединением компонент связности всех элементов $e \in \mathcal{V}^{\geq 2}$, для которых $e^2 \leq -3$, в графе Грама $\mathcal{V}^{\geq 2}$. Тогда система \mathcal{V}^3 эллиптическая /т.е. имеет отрицательно определенную матрицу Грама/, поэтому $\mathcal{V}^3 = \{f_1, \dots, f_m\}$ конечно, и элемент $K(\mathcal{V}^{\geq 2}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$, определяемый условием $K(\mathcal{V}^{\geq 2}) \cdot f = -f^2 - 2$ для всех $f \in \mathcal{V}^{\geq 2}$ обладает свойством: $\alpha_i > -1$ для всех $f_i \in \mathcal{V}^3$.

б/ Для всех $e \in \mathcal{V}^1$

$$\eta(e, \mathcal{V}^{\geq 2}) = 1 + e \cdot K(\mathcal{V}^{\geq 2}) \geq 0. \quad /4.4/$$

Почти дельпещовская лог-терминальная система векторов называется дельпещовской лог-терминальной, если

$$\eta(e, \mathcal{V}^{\geq 2}) > 0$$

для всех $e \in \mathcal{V}^1$.

Соответственно множество \mathcal{V} исключительных кривых неособой алгебраической поверхности Y называется почти дельпещовским /соответственно дельпещовским/ лог-терминальным, если все кривые из \mathcal{V} являются неособыми рациональными и их классы в $NS(Y) \otimes \mathbb{R}$ образуют почти дельпещовскую /соответственно дельпещовскую/ систему векторов. ►

Как мы видели, для минимального разрешения особенностей $\sigma: Y \rightarrow Z$ поверхности Z с лог-терминальными особенностями и с численно эффективным $-K_Z$ множество $Exc(Y)$ исключительных кривых образует почти дельпещовскую лог-терминальную систему. Если же $-K_Z$ численно обилен на Z или,

более общим образом, $-K_Z \cdot E' > 0$ для всякой исключительной кривой E' 1-го рода на Z /всякая такая кривая E' является, по определению, образом $\sigma(E)$ исключительной кривой 1-го рода на Y , и данное условие эквивалентно тому, что $-\sigma^* K_Z \cdot E = 2(E, E_{\text{exc}}(Y)) > 0$ для любой $E \in E_{\text{exc}}(Y)$ /, то множество $E_{\text{exc}}(Y)$ является дельпещовским лог-терминальным.

Нам понадобятся следующие утверждения, хорошо известные специалистам.

Лемма 4.4.3. Пусть e_1, \dots, e_n - эллиптическая система векторов, причем для всех $1 \leq i, j \leq n$ $e_i \cdot e_j \geq 0$, если $i \neq j$, и $e_i^2 < 0$. Тогда:

а/ Если для всех $1 \leq i \leq n$ верно, что $e_i^2 \leq -2$, то

$$K(e_1, \dots, e_n) = d_1 e_1 + \dots + d_n e_n, \text{ где все } d_i \leq 0.$$

б/ Если диаграмма Грама e_1, \dots, e_n связна,

$$K(e_1, \dots, e_n) = d_1 e_1 + \dots + d_n e_n, \quad K(e_1, \dots, e_{n-1}) = d_1 e_1 + \dots + d_{n-1} e_{n-1}$$

то для всех $1 \leq i \leq n-1$ имеем:

$$d'_i > d_i, \text{ если } d_n < 0;$$

$$d'_i = d_i, \text{ если } d_n = 0;$$

$$d'_i < d_i, \text{ если } d_n > 0.$$

в/ Если диаграмма Грама e_1, \dots, e_n связна и система векторов e'_1, \dots, e'_n удовлетворяет условию $e'_i \cdot e'_j = e_i \cdot e_j$ для всех $(i, j) \neq (n, n)$, и $(e'_n)^2 < (e_n)^2$, то система векторов e'_1, \dots, e'_n также эллиптична и для $K(e_1, \dots, e_n) = d_1 e_1 + \dots + d_n e_n$, $K(e'_1, \dots, e'_n) = d'_1 e'_1 + \dots + d'_n e'_n$

для всех $1 \leq i \leq n$ имеем:

$$d'_i < d_i, \text{ если } d_n > -1;$$

$$d'_i = d_i, \text{ если } d_n = -1;$$

$$d'_i > d_i, \text{ если } d_n < -1.$$

Доказательство. а/ Пусть A - матрица Грама $(e_i \cdot e_j)$.

Тогда

$$A \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1^2 - 2 \\ \vdots \\ -e_n^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Утверждение следует из того, что A^{-1} имеем неположительные элементы /см., например, [19]/.

б/ Пусть $e_1^*, \dots, e_n^* \in \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_n$ - двойственный базис. Тогда $e_i^* = \sum u_{ij} e_j$, где все $u_{ij} < 0$, так как $(u_{ij}) = A^{-1}$ и граф Грама e_1, \dots, e_n связан /см., например, [19]/. Очевидно,

$$K(e_1, \dots, e_{n-1}) = K(e_1, \dots, e_n) + t e_n^*,$$

где t находится из условия $d_n + t u_{nn} = 0$. Нужное утверждение вытекает из того, что $u_{nj} < 0$, $1 \leq j \leq n$.

в/ Мы можем считать, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис \mathbb{R} -линейного пространства V с симметрической билинейной формой, определяемой матрицей Грама $(e_i \cdot e_j)$. Рассмотрим линейное пространство $W = V \oplus \mathbb{R}f$ с симметрической билинейной формой, которая совпадает на V с уже заданной и для которой $f^2 = -1$ и $V \perp f$.

Положим $e_i' = e_i$, если $1 \leq i \leq n-1$, и $e_n' = e_n - tf$, $t > 0$. Для векторов e_i' , очевидно, $e_i' \cdot e_j' = e_i \cdot e_j$, если $(i, j) \neq (n, n)$, и $(e_n')^2 = e_n^2 - t^2$. Если матрица Грама

e_1, \dots, e_n отрицательно определена, то заданная на W билинейная форма отрицательно определена. Отсюда следует, что то же верно и для ее ограничения на подпространство

$\mathbb{R}e_1' + \dots + \mathbb{R}e_n' \subset W$, базисом которого является e_1', \dots, e_n' . Поэтому матрица Грама этих векторов отрицательно опре-

делена. Если $K(e_1, \dots, e_n) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, то, как легко видеть,

$$K(e'_1, \dots, e'_n, f) = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n + t(1 + \alpha_n) f + u$$

где $u \perp \mathbb{R}e'_1 + \dots + \mathbb{R}e'_n$. Поэтому $K(e'_1, \dots, e'_n)$ является ортогональной проекцией на $\mathbb{R}e'_1 + \dots + \mathbb{R}e'_n$ элемента $\alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n + t(1 + \alpha_n) f$, где $t > 0$. Отсюда так же, как при доказательстве б/ вытекает требуемое. ►

Из леммы 4.4.3 а/, б/ сразу следует

Предложение 4.4.4. Пусть $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ — подсистема почти дельпещовской /соответственно дельпещовской/ лог-терминальной системы векторов.

Тогда \mathcal{V}' — также почти дельпещовская /соответственно дельпещовская/ лог-терминальная система векторов, причем для $e \in (\mathcal{V}')^1$ имеем: $\eta(e, \mathcal{V}' \geq 2) \geq \eta(e, \mathcal{V} \geq 2)$.

Для изучения почти дельпещовских и дельпещовских лог-терминальных систем векторов оказывается удобным перейти в более широкую категорию систем векторов:

Определение 4.4.5. Система векторов \mathcal{V} , удовлетворяющих условию /4.3/, называется лог-терминальной, если для всякой ее эллиптической подсистемы $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{V}$ для $K(e_1, \dots, e_n) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ выполнены неравенства:

$$\alpha_i > -1 \text{ для всех } 1 \leq i \leq n.$$

Имеет место следующая теорема, доказанная в [12] и являющаяся основной при исследовании почти дельпещовских и дельпещовских лог-терминальных систем векторов. Правда, в [12] рассматривались дельпещовские лог-терминальные системы, но то же доказательство годится и для почти дельпещовских систем.

Теорема 4.4.6. Почти дельпещовская лог-терминальная система векторов является лог-терминальной системой векторов.

Доказательство. Пусть $M = \{f_1, \dots, f_n; e_1, \dots, e_m\}$ - эллиптическая подсистема в почти дельпещовской лог-терминальной системе, где f_1, \dots, f_n - векторы 2-го рода, e_1, \dots, e_m - 1-го рода. По предложению 4.4.4 система M - почти дельпещовская лог-терминальная.

Пусть f_1^*, \dots, f_n^* - двойственный /в $[f_1, \dots, f_n]$ / базис к f_1, \dots, f_n , т.е. $f_i^* \in [f_1, \dots, f_n] \otimes \mathbb{Q}$ и $f_i^* \cdot f_j = \delta_{ij}$. Пусть $z_{ij} = e_i \cdot f_j \geq 0$. Тогда $e_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} f_j^* + e_i'$, где $e_i' \perp [f_1, \dots, f_n]$. При этом $(e_i')^2 < 0$ и для $i \neq k$

$$e_i' \cdot e_k' + \left(\sum_{j=1}^n z_{ij} f_j^* \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n z_{kj} f_j^* \right) \geq 0,$$

ибо $e_i \cdot e_k \geq 0$. Известно, что $f_t^* = \sum u_{ti} f_i$, где $u_{ti} \leq 0$. Отсюда $f_t^* \cdot f_k^* \leq 0$, $1 \leq i, k \leq n$. Поэтому

$$e_i' \cdot e_k' \geq - \left(\sum_{j=1}^n z_{ij} f_j^* \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n z_{kj} f_j^* \right) \geq 0$$

так как $z_{ij} \geq 0$, $z_{kj} \geq 0$.

Пусть $K(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, где $\alpha_i > -1$. Тогда, очевидно,

$$K(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^m \beta_j e_j'$$

Так как $e_k \cdot K(M) = -1$, то

$$-1 = e_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right) + \sum_{j=1}^m \beta_j e_k' \cdot e_j' .$$

По условию почти дельпещовости

$$\eta_k = 1 + e_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right) \geq 0 .$$

Пусть $D = (e_k' \cdot e_j')$, $1 \leq k, j \leq m$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Как мы уже видели, D - симметрическая отрицательно определенная матрица, у которой элементы на диагонали отрицательны, а вне диагонали неотрицательны. Тогда D^{-1} имеет неположительные элементы и строка $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ имеет неотрицательные элементы. Отсюда получаем.

$$\begin{aligned} K(M) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^m \beta_j \left(e_j - \sum_{i=1}^n z_{ji} f_i^* \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i - \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n z_{ji} \sum_{k=1}^n u_{ik} f_k + \sum_{j=1}^m \beta_j e_j, \quad (4.5) \end{aligned}$$

где $\alpha_i > -1$, $z_{ji} \geq 0$, $u_{ik} \leq 0$, $\beta_j \geq 0$. ►

Соответственно определению 4.4.5 множество \mathcal{V} исключительных кривых неособой алгебраической поверхности Y называется лог-терминальным, если всякая кривая из \mathcal{V} является неособой рациональной кривой и их классы в $NS(Y) \otimes \mathbb{R}$ образуют лог-терминальную систему векторов.

Из теоремы 4.4.6 вытекает

Следствие 4.4.7. Пусть $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей поверхности Z с лог-терминальными особенностями и с nef антиканоническим классом $-K_Z$. Тогда множество $Exc(Y)$ исключительных кривых на Y образует лог-терминальную систему.

Пусть \mathcal{V} - лог-терминальная система векторов и $e \in \mathcal{V}$ - вектор 1-го рода. Стыгиванию исключительной кривой 1-го рода на поверхности соответствует ортогональная проекция \mathcal{V} вдоль вектора e . При этом вектор v переходит в вектор

$$\tilde{v} = v + (v \cdot e)e, \quad /4.6/$$

причем:

$$\tilde{v}^2 = v^2 + (v \cdot e)^2, \quad /4.7/$$

$$(\tilde{v} \cdot \tilde{v}') = v \cdot v' + (v \cdot e)(\tilde{v} \cdot e). \quad /4.8/$$

Множество векторов

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{ \tilde{v} \mid v \in \mathcal{V}, \tilde{v}^2 < 0 \} \quad /4.9/$$

называется полученным стягиванием вектора $e \in \mathcal{V}$ 1-го рода. Матрица Грама $\tilde{\mathcal{V}}$ по-прежнему целочисленна, имеет отрицательные элементы на диагонали и неотрицательные элементы вне диагонали. Вектор $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ называется образом v , а v - собственным прообразом \tilde{v} . Отметим, что вектор $v \in \mathcal{V}$

имеет образ, если и только если пара векторов $\{v, e\}$ эллиптическая. Отсюда следует: Если система \mathcal{V} эллиптическая, то $\tilde{\mathcal{V}}$ тоже эллиптическая и всякий вектор $v \in \mathcal{V}$ имеет образ /формально считается, что образом e является ноль/. Если \mathcal{V} - связная параболическая система векторов и $\#\mathcal{V} \geq 3$, то $\tilde{\mathcal{V}}$ - также связная параболическая система, и всякий вектор из \mathcal{V} имеет образ /в $\tilde{\mathcal{V}}$ /. Если \mathcal{V} - ланнеровская система и либо $\#\mathcal{V} \geq 4$, либо $\#\mathcal{V} = 3$ и всякая пара векторов из \mathcal{V} эллиптическая, то $\tilde{\mathcal{V}}$ - также ланнеровская система и всякий вектор из \mathcal{V} имеет образ. В тех случаях, когда при стягивании вектора e 1-го рода всякий вектор из \mathcal{V} имеет образ, это стягивание обозначается как $\mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$.

Предложение 4.4.8. Система из двух векторов эллиптическая и лог-терминальна, если и только если граф Грама этих векторов имеет вид

$$\begin{array}{ccc} v_1 \geq 1 & v_2 \geq 1 & \\ \bullet & \bullet & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} v_1 \geq 1 & & v_2 \geq 2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением. ►

Пусть $M = \{v_1, \dots, v_n, e\}$ - эллиптическая лог-терминальная система векторов и e - вектор 1-го рода. Пусть система $\tilde{M} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ получена стягиванием: $e, v_i \mapsto \tilde{v}_i$. По предложению 4.4.8 $e \cdot v_i = 0$ или 1, откуда из формул /4.6/ - /4.8/ следует, что

$$K(M) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha e, \quad \text{где } \alpha = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i \cdot e); \quad /4.10/$$

$$K(\tilde{M}) = \alpha_1 \tilde{v}_1 + \dots + \alpha_n \tilde{v}_n. \quad /4.11/$$

Поэтому из /4.10/ и /4.11/ вытекает следующее важнейшее:

свойство лог-терминальных систем векторов, делающее их значительно более удобными, чем почти дельпещовские лог-терминальные системы векторов:

Предложение 4.4.9. Пусть \mathcal{V} - лог-терминальная система векторов и $e \in \mathcal{V}$ - вектор 1-го рода.

Тогда при стягивании e система \mathcal{V} переходит опять в лог-терминальную систему векторов $\tilde{\mathcal{V}}$.

Обратное /стягиванию вектора e 1-го рода/ преобразование - раздутие полного подграфа - проще всего описать на языке графов Грама. Пусть Γ - граф и $\Gamma_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ - его полный подграф, т.е. любые две вершины v_i, v_j в Γ_1 соединяются ребром веса $z(v_i, v_j) \geq 1$. При раздутии подграфа Γ_1 граф Γ меняется следующим образом: веса вершин v_1, \dots, v_k увеличиваются на 1, веса ребер $z(v_i, v_j)$ уменьшаются на 1 /в частности, простое ребро пропадает. Отметим, что, как правило, приходится раздувать вершины / $\Gamma_1 = \{v\}$ / или ребра / $\Gamma_1 = \{v_1, v_2\}$ /. Важно помнить, что при таком раздутии лог-терминальность системы векторов может не сохраниться. Это контролируется при помощи формул /4.10/, /4.11/.

Предложение 4.4.9 подсказывает следующее

Определение 4.4.10. Лог-терминальная система векторов называется минимальной, если \mathcal{V} не допускает стягиваний

$\mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$ векторов 1-го рода e из \mathcal{V} . Отметим, что система \mathcal{V} может быть минимальна по двум причинам: во-первых, \mathcal{V} не имеет векторов e 1-го рода; во-вторых, для всякого вектора e 1-го рода из \mathcal{V} найдется такой вектор $v \in \mathcal{V}$, что пара $\{e, v\}$ не эллиптическая /по предложению 4.4.8 это эквивалентно тому, что либо $v^2 = -1$, либо $e \cdot v \geq 2$ /.

Из предложения 4.4.9 следует, что всякая лог-терминальная

система векторов получается из минимальной последовательностью раздутий полных подграфов. Поэтому описание лог-терминальных систем векторов во многом сводится к описанию минимальных систем. В связи с теоремами 3.4 - 3.6 нас будет интересовать, главным образом, описание эллиптических, параболических и ланнеровских лог-терминальных систем.

Пусть $\mathcal{E} = \{f_1, \dots, f_n\}$ - эллиптическая лог-терминальная система векторов. Тогда минимальность \mathcal{E} эквивалентна тому, тому, что \mathcal{E} не содержит векторов 1-го рода. По лемме 4.4.3 а/, б/ эллиптическая система \mathcal{E} без векторов 1-го рода лог-терминальна, если и только если

$$K(\mathcal{E}) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n,$$

где $\alpha_i > -1$. Описание таких систем эквивалентно описанию графов лог-терминальных особенностей / точнее, наоборот, описание графов лог-терминальных особенностей сводится к описанию таких систем; последнее проводится чисто алгебраически, используя лемму 4.4.3/. Поэтому имеет место следующая теорема /см. [20], [29], [8] /, где под лог-терминальным графом мы понимаем граф Грама лог-терминальной системы векторов. То же относится к словам: минимальный эллиптический, параболический, ланнеровский.

Теорема 4.4.11. а/ Эллиптическая лог-терминальная система векторов минимальна, если и только если она не содержит векторов 1-го рода. Связные минимальные эллиптические лог-терминальные графы Грама - это в точности графы $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$ таблицы 1.

б/ Эллиптическая система векторов лог-терминальна, если и только если всякая ее связная подсистема допускает стягивание последовательности векторов 1-го рода на один из графов $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$ таблицы 1.

Из этой теоремы сразу вытекает

Следствие 4.4.12. Связный эллиптический лог-терминальный граф не имеет кратных ребер, является деревом, из всякой его вершины 1-го рода выходит не более двух ребер, всякий его связный подграф из вершин 2-го рода изоморфен одному из графов

$\Gamma_1 - \Gamma_{17}$ таблицы 1.

Рассмотрим параболический случай. В этом случае, пользуясь теоремой 4.4.11, следствием 4.4.12 и тем, что всякий собственный подграф связного параболического графа эллиптивен, доказывается:

Теорема 4.4.13. а/ Связная параболическая лог-терминальная система векторов минимальна, если и только если она либо не содержит векторов 1-го рода, либо имеет два вектора.

б/ Связные минимальные параболические лог-терминальные графы, содержащие по крайней мере три вершины, — это в точности графы \tilde{A}_n , $n \geq 2$; \tilde{D}_n , $n \geq 4$; \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 таблицы 2 /где нижний индекс указывает число вершин без единицы; здесь и всюду ниже предполагается, что черная вершина, вес которой не указан, имеет вес 2/.

Связные минимальные параболические лог-терминальные графы из двух вершин, допускающие раздутие полного подграфа до связного параболического лог-терминального графа из трех вершин, — это в точности графы \tilde{A}_1 , P_1 , P_2 таблицы 2 /здесь и всюду ниже прозрачная вершина обозначает вершину 1-го рода/.

Доказательство. См. [12, теорема 1.1.6]. ►

Следствие 4.4.14. Всякий связный параболический лог-терминальный граф с не менее чем тремя вершинами имеет лишь простые ребра, является либо циклом, либо деревом, из всякой его вершины 1-го рода выходит не более двух ребер, исключая графы P_4 ,

P_5 , P_6 таблицы 2.

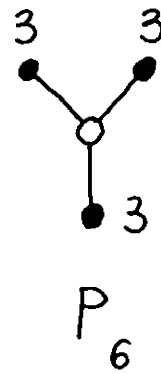
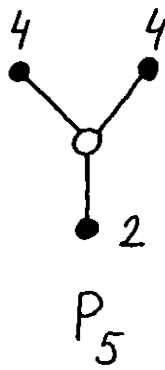
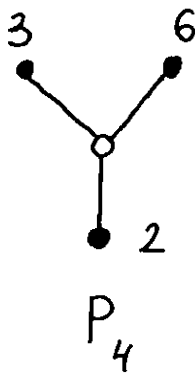
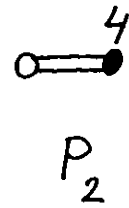
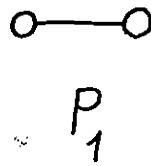
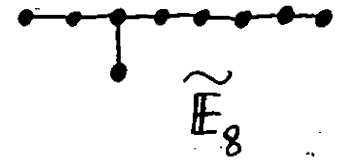
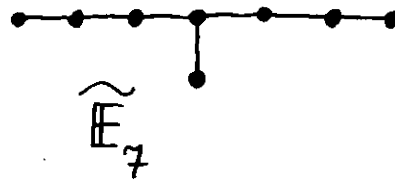
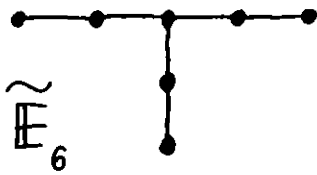
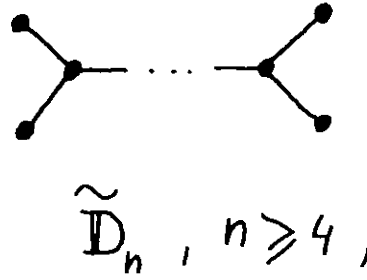
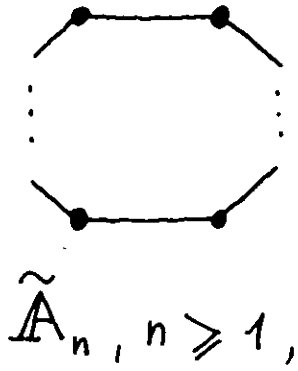
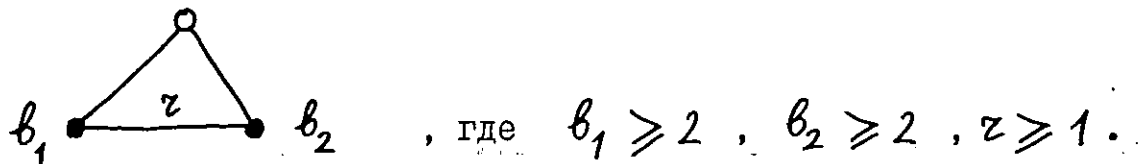
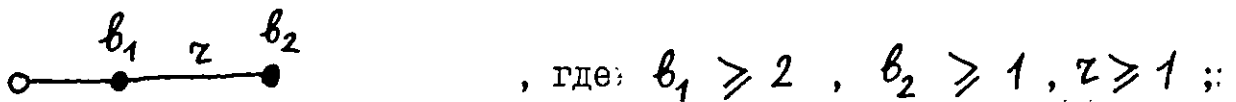


Таблица 2.

Доказательство. См. [12, следствие 1.1.7]. ▶

Рассмотрим ланнеровский случай. В этом случае, используя предыдущие утверждения про эллиптические и параболические лог-терминальные графы и то, что собственный подграф ланнеровского графа либо эллиптичен, либо связан и параболичесен /причем в последнем случае он содержит лишь на одну вершину меньше чем исходный граф/ доказывается

Теорема 4.4.15. а/ Ланнеровская лог-терминальная система векторов минимальна, если и только если она либо не содержит векторов 1-го рода, либо содержит не более трех векторов и имеет граф Грама, отличный от графов:



б/ Минимальные ланнеровские лог-терминальные графы, содержащие по крайней мере 4-е вершины, это в точности графы G_7 - $St(E_8, v)$ таблицы 3, а/ /где $v \geq 2$ /.

в/ Минимальные ланнеровские лог-терминальные графы, содержащие не более трех вершин и допускающие последовательность раздутых полных подграфов, которая дает лог-терминальный ланнеровский граф из 4-х вершин, это в точности графы $G_1(1, 1; 3)$ - $G_5(1, 4, 1)$ таблицы 3, б/.

Доказательство. См. [12, теорема 1.1.8] /отметим, что в [12] в формулировке теоремы 1.1.8 пропущен граф $G_1(1, 1; 2)$!▶

Следствие 4.4.16. Всякий ланнеровский лог-терминальный граф, содержащий по крайней мере 6-ть вершин, является либо деревом, либо циклом, либо циклом и еще одной вершиной, соединяющейся ро-

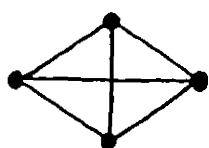
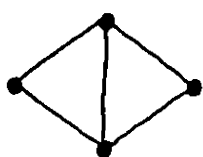
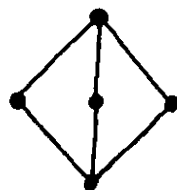
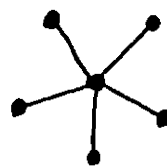
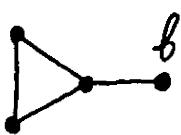
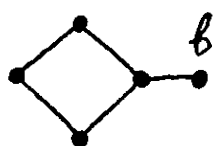
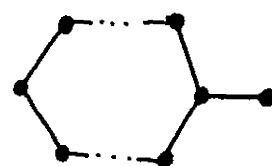
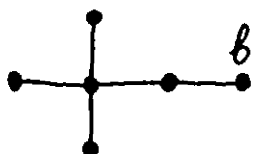
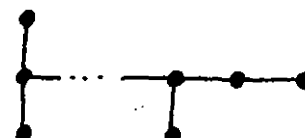
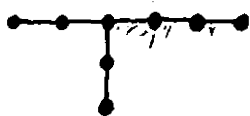
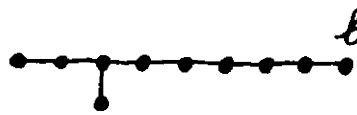
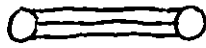
 G_7  G_8  G_9  G_{10}  $St(A_2, b)$  $St(A_3, b)$  $St(A_4, b),$
 $b=2, 3, 4, 5$  $St(A_n),$
 $n=5, 6, 7$  $St(D_4, b)$  $St(D_5, b),$
 $b=2, 3$  $St(D_n),$
 $n=6, 7, 8$  $St(E_6)$  $St(E_7)$  $St(E_8, b)$

Таблица 3, а/.

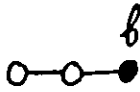


$$G_1(1, 1; 3)$$



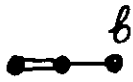
$$G_1(1, b; 2),$$

$$b = 1, 2, 3$$



$$G_2(1, 1, b),$$

$$b \geq 1$$



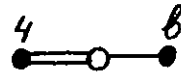
$$G_2(2, 2; b),$$

$$b \geq 2$$



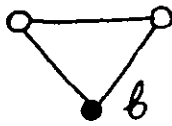
$$G_2(1, 4, b),$$

$$b \geq 2$$



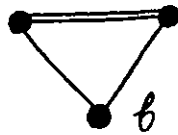
$$G_2(4, 1, b),$$

$$b \geq 1$$



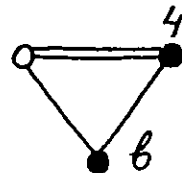
$$G_3(1, 1, b),$$

$$b \geq 1$$



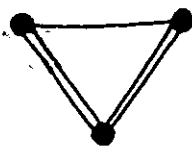
$$G_3(2, 2, b),$$

$$b \geq 2$$

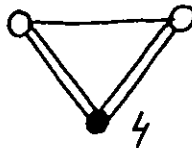


$$G_3(1, 4, b),$$

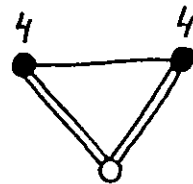
$$b \geq 1$$



$$G_5(2, 2, 2)$$



$$G_5(1, 4, 1)$$



$$G_5(4, 1, 4)$$

Таблица 3, б/.

вно с одной вершиной этого цикла простым ребром; все ребра этого графа простые и из каждой вершины 1-го рода выходит не более двух ребер.

Доказательство. См. [12, следствие 1.1.9].

В дальнейшем нам понадобится описание тонкой структуры эллиптических, параболических и ланнеровских лог-терминальных графов. Под этим мы понимаем описание формы этих графов и способ их получения при помощи раздутий из простейших, например, минимальных графов.

По следствиям 4.4.12, 4.4.14, 4.4.16 связный эллиптический, параболический, ланнеровский лог-терминальный граф, содержащий достаточно много вершин, является циклом, циклом и еще одной вершиной или деревом. Разберем эти случаи.

Случай цикла. В этом случае имеют место следующие утверждения.

Предложение 4.4.17. Если параболический лог-терминальный граф является циклом, содержащим по крайней мере 3-и вершины, то он получается при помощи последовательности раздутий ребер из графов \tilde{A}_n , $n \geq 1$, и P_2 /см. таблицу 2/.

Доказательство. Сразу вытекает из теоремы 4.4.13 и следствия 4.4.14. ►

Предложение 4.4.18. Если ланнеровский лог-терминальный граф является циклом, содержащим по крайней мере 4-е вершины, то он получается при помощи последовательности раздутий ребер графов $G_1(1, \nu; 2)$, $\nu = 1, 2, 3$ и $G_3(1, 1, \nu)$, $\nu \geq 1$ таблицы 3, 6/.

Доказательство. Каждые две вершины этого цикла C образуют эллиптический граф, поэтому по следствию 4.4.12 ребра этого цикла простые. Стыгивая последовательность вершин 1-го рода, мы

придем к минимальному графу, являющемуся либо циклом с простыми ребрами, либо парой вершин, соединяющихся двойным ребром. По теореме 4.4.15 такими минимальными графами являются $G_3(1, 1, \nu)$ и $G_1(1, \nu; 2)$. Откуда вытекает требуемое.

Случай цикла и еще одной вершины. В этом случае имеет место

Предложение 4.4.19. Если ланнеровский лог-терминальный граф содержит по крайней мере 4-е вершины и состоит из цикла и еще одной вершины, соединяющейся с вершиной цикла простым ребром, то он получается при помощи последовательности раздутий ребер циклов графов $St(A_2, \nu)$, $\nu \geq 1$; $St(A_3, \nu)$, $\nu \geq 1$; $St(A_4, \nu)$, $\nu = 2, 3, 4, 5$; $St(A_n)$, $n = 5, 6, 7$ /см. таблицу 3, а/ и графов $G_2'(2, 2, \nu) - G_5''(1, 4, 1)$ таблицы 4.

Доказательство. Пусть Γ - этот граф, и пусть C - цикл графа Γ , ν - вершина Γ , не входящая в цикл C . Обозначим через ν_1 вершину цикла C , соединяющуюся с ν ребром. Цикл C является параболическим графом, так как по следствию 4.4.12 он не может быть эллиптическим. Если цикл C минимален, то по теореме 4.4.13 он является графом \tilde{A}_n , $n \geq 2$. Если вес вершины ν больше 1, то весь граф Γ минимален, и по теореме 4.4.15 он совпадает с графами $St(A_2, \nu)$, $\nu \geq 2$, $St(A_3, \nu)$, $\nu \geq 2$, $St(A_4, \nu)$, $\nu = 2, 3, 4, 5$ и $St(A_n)$, $n = 5, 6, 7$. Если вес ν равен единице, то, как легко видеть, граф Γ ланнеровский для цикла \tilde{A}_n только при $n = 2$ и 3 , так как при $n \geq 4$ подграф Γ , образованный соседними с ν_1 вершинами параболичесок и содержит 4-е вершины. Поэтому Γ содержит не более 5-ти вершин. Таким образом, в тех случаях, когда

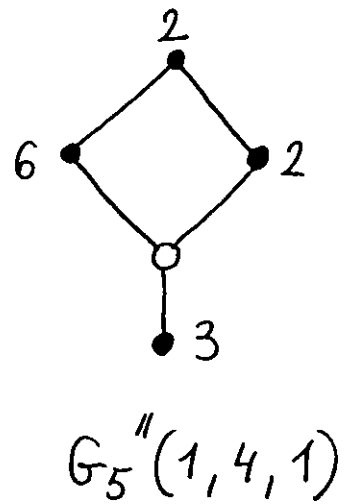
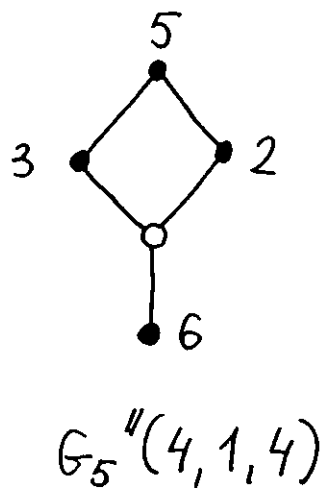
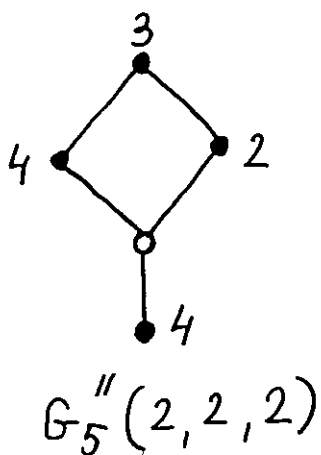
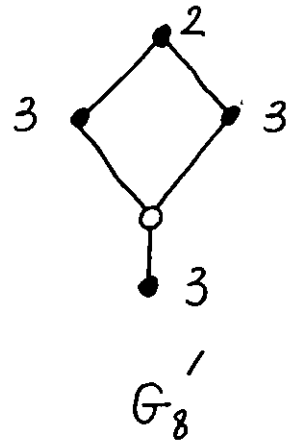
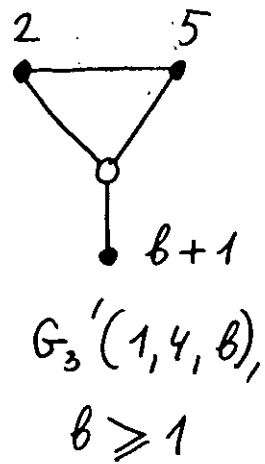
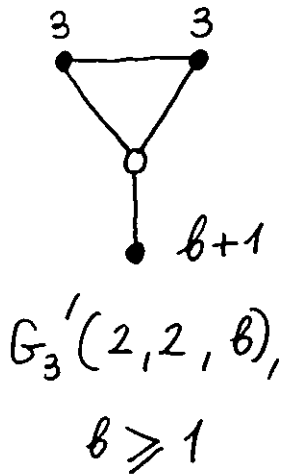
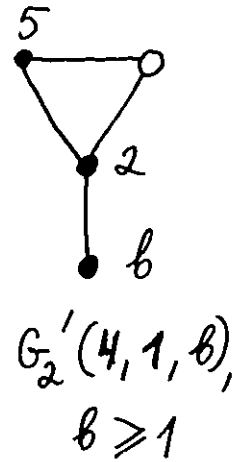
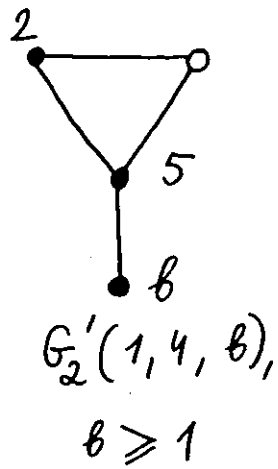
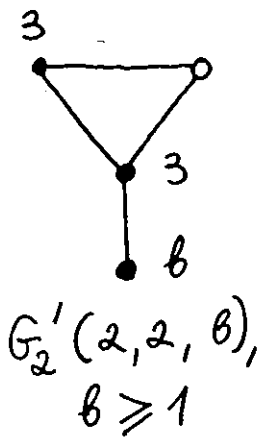


Таблица 4.

цикл C минимален, мы получаем графы предложения 4.4.19
 $St(A_2, b)$, $b \geq 1$, $St(A_3, b)$, $b \geq 1$; $St(A_4, b)$,
 $b = 2, 3, 4, 5$ и $St(A_n)$, $n = 5, 6, 7$.

Пусть цикл C не минимален. Тогда он содержит вершины 1-го рода. Если число вершин Γ не меньше 6, то по следствию 4.4.16 вершина v_1 этого цикла не может быть вершиной 1-го рода, поэтому в этом случае найдется вершина e 1-го рода цикла

C , отличная от v_1 . Стынем все вершины 1-го рода цикла C и его образов, отличные от вершины v_1 и ее образов. В результате мы получим либо уже перечисленные графы /вида $St(A_n, b)$ /, либо графы $G_2(2, 2; b)$, $G_2(1, 4, b)$, $G_2(4, 1, b)$, где $b \geq 1$ /см. таблицу 3, б//, либо графы Γ , удовлетворяющие условию теоремы, у которых вершина v_1 является вершиной 1-го рода, остальные вершины цикла C — 2-го рода и цикл C содержит не более 4-х вершин. В первых двух случаях мы получаем, что Γ получается раздутием ребер циклов графов вида

$$St(A_n, b), G_2'(2, 2, b), G_2'(1, 4, b) \text{ и } G_2'(4, 1, b),$$

указанных в условии теоремы. В третьем случае из предложения 4.4.18 получаем, что цикл C совпадает с циклами графов:

$$G_3'(2, 2, b), G_3'(1, 4, b), G_8, G_5''(2, 2, 2),$$

$$G_5''(4, 1, 4), G_5''(1, 4, 1) \text{ таблицы 4. Простая проверка}$$

на ланнеровость показывает, что вес вершины b в этих случаях такой, как указано в таблице 4. /Отметим, что обозначения графов таблицы 4 показывают, на какие минимальные ланнеровский графы они стягиваются./ ►

Случай дерева. Всякий эллиптический лог-терминальный граф получается последовательностью раздутий вершин и ребер из минимальных эллиптических лог-терминальных графов: $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$, являющихся деревьями. В параболическом и ланнеровском случае также можно указать такие графы.

Предложение 4.4.20. Всякий связный параболический лог-терминальный граф, являющийся деревом и содержащий по крайней мере три вершины, получается последовательностью раздутий вершин и ребер из графов P_1 , \tilde{D}_n , $n \geq 4$, \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 и графов P_4 , P_5 , P_6 таблицы 2.

Доказательство. Будем стягивать у такого графа Γ последовательности вершин 1-го рода, из которых выходит не более двух ребер. При этом граф Γ будет оставаться деревом с простыми ребрами. В результате мы придем либо к минимальному параболическому лог-терминальному графу, являющемуся деревом, которые по теореме 4.4.13 суть P_1 , \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 , либо к параболическому лог-терминальному графу, являющемуся деревом и у которого из каждой вершины 1-го рода выходит по крайней мере 3-и ребра. По следствию 4.4.14 во втором случае мы получаем графы P_4 , P_5 , P_6 таблицы 2. ►

Предложение 4.4.21. Всякий ланнеровский лог-терминальный граф, являющийся деревом и содержащий по крайней мере 4-е вершины, получается последовательностью раздутий вершин и ребер из следующих ланнеровских лог-терминальных графов, являющихся деревьями с простыми ребрами: Это минимальные графы G_{10} , $St(D_4, b)$, $b \geq 2$; $St(D_5, b)$, $b = 2, 3$; $St(D_n)$, $n = 6, 7, 8$; $St(E_6)$; $St(E_7)$; $St(E_8, b)$, $b \geq 2$; $G_2(1, 1, b)$ таблицы 3 и графы G_7' — $G_7''(1, b, 2)$ таблицы 5.

Доказательство. Пусть Γ — такой граф. Последовательно стянем все вершины 1-го рода, из которых выходит не более двух ребер. В результате мы получим ланнеровский лог-терминальный граф Γ' , являющийся деревом с простыми ребрами и который либо минимален, либо не минимален, но из каждой его вершины

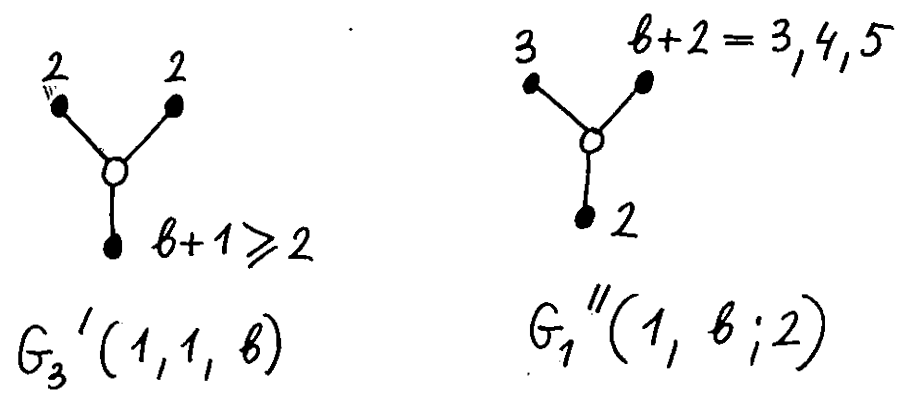
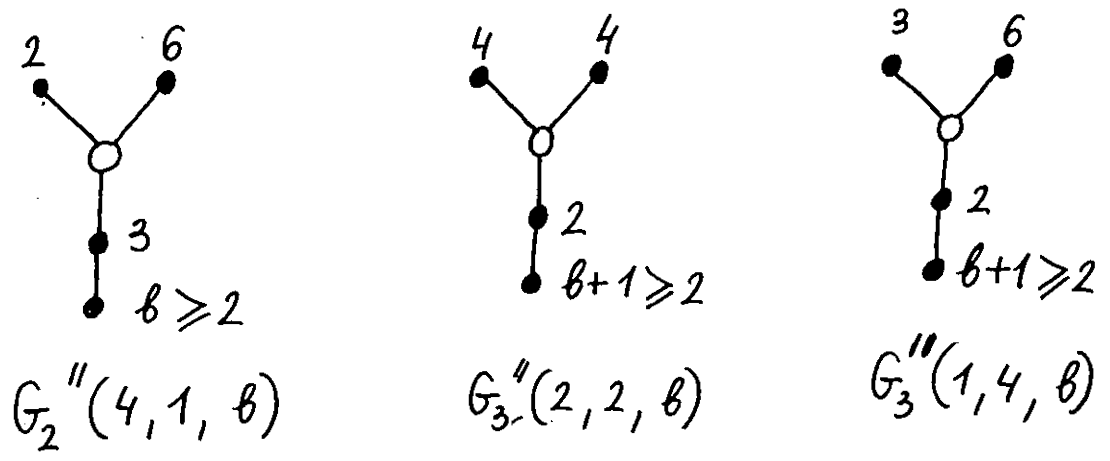
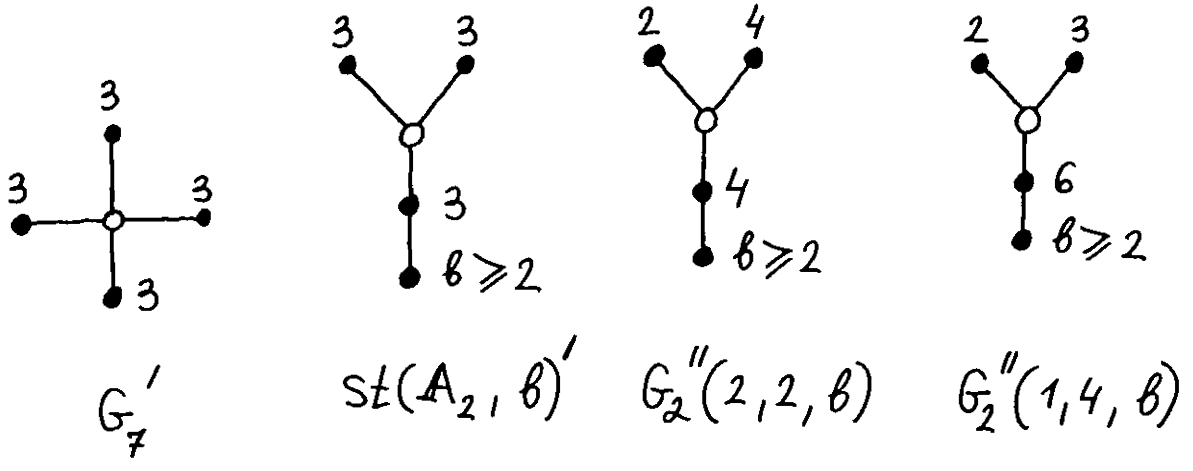


Таблица 5.

1-го рода выходит по крайней мере три ребра. В первом случае мы получаем графы таблицы 3, указанные в условии предложения. Во втором случае рассмотрим вершину e 1-го рода дерева Γ' . Пусть v_1, v_2, v_3 — три различные вершины Γ' , соединяющиеся с e ребром. Так как Γ' содержит не менее 4-х вершин, то каждый подграф $\{e, v_i\}$ эллиптичен и поэтому вершины v_1, v_2, v_3 2-го рода. По следствию 4.4.12 подграф $\{e, v_1, v_2, v_3\}$ не может быть эллиптичен, поэтому он либо гиперболический и тогда $\Gamma' = \{e, v_1, v_2, v_3\}$ либо он параболический и Γ' содержит тогда еще только одну вершину v_4 . Так как Γ' является деревом, то мы получаем, что Γ' имеет ту же форму, что и графы таблицы 5, причем по условию вершина v_4 также 2-го рода, так как из нее выходит одно ребро. Стягивая вершину e и возникающие в результате этого и последующих стягиваний новые вершины 1-го рода, мы должны получить один из минимальных графов таблицы 3. Отсюда без труда получаем точный вид графов Γ' , указанный в таблице 5. Обозначения графов таблицы 5 показывает, на какие минимальные графы они стягиваются. ►

Займемся теперь выяснением формы параболических и ланнеровских лог-терминальных деревьев Γ . Она зависит от того, на какой из графов предложений 4.4.20 и 4.4.21 это дерево стягивается. Нам будет удобно, вначале, дать некоторые общие определения. Назовем стягивание вершины /или вектора/ 1-го рода e слабым стягиванием, если из вершины e выходит не более двух ребер. Другими словами, стягивание слабое, если оно обратное раздутью вершины или ребра. Лог-терминальный граф Γ , не допускающий слабых стягиваний $\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ называется слабо минимал-

льным. Минимальный граф, очевидно, и слабо минимален. Для эллиптических лог-терминальных графов по следствию 4.4.12 всякое стягивание вершины 1-го рода является слабым стягиванием, поэтому всякая слабо минимальная модель минимальна. Графы P_4 , P_5 , P_6 предложения 4.4.20 и графы таблицы 5 из предложения 4.4.21 являются слабо минимальными, но не являются минимальными параболическими и ланнеровскими лог-терминальными графами. Всякий лог-терминальный граф Γ допускает последовательность слабых стягиваний $\Gamma \rightarrow \Gamma^{\omega \min}$ на слабо минимальный граф $\Gamma^{\omega \min}$. В этом случае $\Gamma^{\omega \min}$ называется слабо минимальной моделью Γ . Предложения 4.4.20 и 4.4.21 можно рассматривать как описание слабо минимальных моделей параболических и ланнеровских лог-терминальных деревьев.

Следующие утверждения описывают форму параболических и ланнеровских лог-терминальных деревьев, имеющих слабо минимальную модель, отличную от P_1 и $G_3'(1, 1, \nu)$, $G_1''(1, \nu, 2)$, $G_2(1, 1, \nu)$. /Последние случаи наиболее сложны и будут рассмотрены позднее вместе с эллиптическим случаем./ Отметим, что при раздутии простого ребра вид дерева не меняется /т.е. не добавляются новые концы/.

Предложение 4.4.22. Пусть Γ - связное параболическое лог-терминальное дерево и пусть Γ допускает последовательность слабых стягиваний $\Gamma \rightarrow \Gamma^{\omega \min}$ на слабо минимальную модель $\Gamma^{\omega \min}$, которая есть \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 или P_4 , P_5 , P_6 . Тогда Γ получается из $\Gamma^{\omega \min}$ в результате последовательности раздутий ребер.

Предложение 4.4.23. Пусть Γ - ланнеровское лог-терминальное дерево и пусть Γ допускает последовательность слабых стягиваний $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma^{\omega \min}$ на слабо минимальную модель $\Gamma^{\omega \min}$, ко-

торая есть $St(D_4, \mathcal{B}), St(D_5, \mathcal{B}), St(D_n), n=6, 7, 8,$
 $St(E_6), St(E_7), St(E_8, \mathcal{B})$ таблицы 3 или $G_7',$
 $St(A_2, \mathcal{B})', G_2''(2, 2, \mathcal{B}), G_2''(1, 4, \mathcal{B}), G_2''(4, 1, \mathcal{B}),$
 $G_3''(2, 2, \mathcal{B}), G_3''(1, 4, \mathcal{B})$ таблицы 5. Пусть \mathcal{P} - любой свя-
 занный параболический подграф $\Gamma^{w_{min}}$. Тогда τ является обрат-
 ным последовательности раздутий ребер, происходящих из подграфа
 \mathcal{P} графа $\Gamma^{w_{min}}$.

Доказательство предложений 4.4.22 и 4.4.23.

Начнем со следующего /несомненно общеизвестного/ общего за-
 мечания. Пусть $\mathcal{B}: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ - последовательность стягиваний ве-
 ршин 1-го рода графа Γ . Она, очевидно, определяется последо-
 вательностью v_1, \dots, v_n вершин графа Γ , являющихся собс-
 твенными прообразами стягиваемых вершин 1-го рода в том поряд-
 ке, в котором они стягиваются.

Лемма 4.4.24. Стягивание последовательности вершин 1-го рода
 не зависит от порядка стягиваний.

Доказательство. Пусть v_1, \dots, v_n - последовательность
 вершин графа Γ , определяющая последовательность стягиваний
 вершин 1-го рода. Пусть w_1, \dots, w_n - другая последовательность
 стягиваний тех же вершин. Проведем индукцию по n . Для $n=1$
 утверждение очевидно. Если $v_1 = w_1$, то обе последовательности
 стягиваний эквивалентны по предположению индукции. Пусть

$w_1 = v_t$, где $1 < t \leq n$. Заметим, что $\{v_1, \dots, v_n\} =$
 $= \{w_1, \dots, w_n\}$ - эллиптическое подмножество в Γ , так как
 оно стягивается, поэтому $\{v_1, \dots, v_{t-1}\}$ - также эллиптическое
 подмножество в Γ . Поэтому при стягивании последовательности
 вершин $\{v_1, \dots, v_{t-1}\}$ образы вершин

v_t, \dots, v_n образуют эллиптическое подмножество. Вершина $v_t = w_1$ — 1-го рода, поэтому при стягивании v_1, \dots, v_{t-1} ее вес не меняется, так как он может лишь уменьшиться, но не может стать равным нулю, что противоречило бы эллиптичности

$\{v_1, \dots, v_n\}$. Отсюда следует, что вершина $v_t = w_1$ не соединяется в Γ ребрами с вершинами v_1, \dots, v_{t-1} . В этом случае, очевидно, последовательность стягиваний v_1, \dots, v_n эквивалентна последовательности стягиваний $w_1, v_1, \dots, v_{t-1}, v_{t+1}, \dots, v_n$. Последняя последовательность стягиваний в силу предыдущего эквивалентна последовательности стягиваний w_1, \dots, w_n . \blacktriangleright

Докажем предложение 4.4.22. Пусть $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma^{w \min}$ — стягивание последовательности вершин 1-го рода. Пусть v_1, \dots, v_n — все различные вершины графа $\Gamma^{w \min}$ и $v_i' = \sigma^{-1}(v_i)$. Если v_i, v_j — соседние вершины $\Gamma^{w \min}$, то вершины v_i', v_j' соединяются в Γ единственным путем z_{ij} , не содержащим вершин v_k' , отличных от v_i' и v_j' . Стянем все последовательности вершин 1-го рода, лежащих на путях z_{ij} и отличных от v_i', v_j' . Пусть $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ — это стягивание. Тогда по лемме 4.4.24 мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma^{w \min} \\ & \searrow \tau & \nearrow \sigma' \\ & \Gamma' & \end{array}$$

последовательностей стягиваний вершин 1-го рода. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что $\Gamma' = \Gamma^{w \min}$ т.е.

σ' тождественно. По-первых, в графе Γ' всякая вершина $v_i'' = \sigma'^{-1}(v_i) = \tau(v_i')$ имеет вес не меньший, чем вес вершины

v_i . Во-вторых, по построению Γ' , если v_i, v_j — соседние вершины $\Gamma^{w \min}$, то вершины v_i'', v_j'' соединяются в Γ'

единственным путем, на котором лежат, кроме v_i'' и v_j'' , лишь вершины второго рода, отличные от вершин v_k'' , $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $[v_1'', \dots, v_2'']$ связанное поддерево в Γ' , натянутое на v_1'', \dots, v_2'' . Из сделанных замечаний, вида графов $\Gamma^{\omega \min}$ и классификации эллиптических лог-терминальных графов вытекает, что это поддерево не может быть эллиплично. Поэтому оно параболично и совпадает с Γ' . Если \mathcal{S}' не тождественно, то найдется вершина 1-го рода графа Γ' , отличная от v_i'' , $i = 1, \dots, n$, но это противоречит построению дерева $\Gamma' = [v_1'', \dots, v_2'']$.

Докажем предложение 4.4.23. Пусть $\mathcal{S} \subset \Gamma^{\omega \min}$ — параболический подграф $\Gamma^{\omega \min}$. Пусть $\tau^* \mathcal{S}$ — подмножество всех тех вершин Γ , которые являются либо собственными прообразами вершин \mathcal{S} , либо произошли в результате раздутия вершин и ребер из подграфа \mathcal{S} . Тогда $\tau^* \mathcal{S}$ — связный параболический подграф Γ , отличающийся от Γ лишь на вершину $\tau^{-1}(v)$, где v — вершина $\Gamma^{\omega \min}$, не принадлежащая \mathcal{S} . Отсюда следует, что $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma^{\omega \min}$ является последовательностью раздутий вершин и ребер, происходящих из подграфа \mathcal{S} . Подграф \mathcal{S} совпадает с одним из графов $\Gamma^{\omega \min}$ предложения 4.4.22, поэтому по предложению 4.4.22 τ является последовательностью раздутий ребер, происходящих из подграфа \mathcal{S} . ►

Доказательство предложения 4.4.23 показывает, что оно на самом деле имеет место для несколько более широкого, чем в предложении 4.4.23, класса ланнеровских лог-терминальных деревьев Γ , содержащих параболический подграф \mathcal{S} , допускающий слабо минимальную модель $\tilde{\tau}: \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$, где \mathcal{S} — один из слабо

минимальных параболических графов \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 или P_4 , P_5 , P_6 . Следующее утверждение дает описание всех таких графов и переносит на них результат предложения 4.4.23.

Предложение 4.4.25. Пусть Γ — ланнеровское лог-терминальное дерево, содержащее параболический подграф $\tilde{\mathcal{S}}$, допускающий слабо минимальную модель $\tilde{\tau}: \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$, где \mathcal{S} — одно из слабо минимальных параболических деревьев: \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 , или P_4 , P_5 , P_6 .

Тогда $\tilde{\tau}$ продолжается до последовательности слабых стягиваний $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma_1$, где либо $\Gamma_1 = \Gamma^{w \min}$ — также слабо минимальное лог-терминальное дерево, удовлетворяющее условиям предложения 4.4.23, либо Γ_1 — это один из графов $St(D_4, 1)$ / см. таблицу 3, а//, $St(A_2, 1)'$, $G_2''(2, 2, 1)$, $G_2''(1, 4, 1)$, $G_2''(4, 1, 1)$ / см. таблицу 5/ / в этом случае Γ_1 допускает слабое стягивание на слабо минимальные модели соответственно $G_3'(1, 1, 1)$, $G_1''(1, 1, 2)$, $G_1''(1, 2, 2)$, $G_1''(1, 3, 2)$, $G_3'(1, 1, 5)$ /. В любом случае τ является обратным последовательности раздутий ребер, происходящих из параболического подграфа $\mathcal{S} \subset \Gamma_1$.

Доказательство. Число вершин \mathcal{S} не меньше 4-х, поэтому число вершин Γ_1 не меньше 5-ти, а число вершин любого графа Γ' , предшествующего Γ_1 при последовательности стягиваний τ , не меньше 6. По следствию 4.4.16 из каждой вершины 1-го рода графа Γ' выходит не более двух ребер. Отсюда следует, что τ — последовательность слабых стягиваний. Пусть v — вершина Γ , не принадлежащая $\tilde{\mathcal{S}}$. Если $\tau(v)$ является вершиной 2-го рода, то, очевидно, $\Gamma_1 = \Gamma^{w \min}$ — слабо минимальное дерево, так как оно состоит из \mathcal{S} и вершины $\tau(v)$. Если

$f = \tau(v)$ является вершиной 1-го рода, то из f выходит ровно одно ребро в одну из вершин \mathcal{S} , так как \mathcal{S} связно и Γ_1 является деревом. Простой перебор всех возможных графов $\mathcal{S} = \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, P_4, P_5, P_6$ дает, что Γ_1 является ланнеровским графом лишь в тех случаях, которые указаны в предложении. Доказательство последнего утверждения дословно повторяет доказательство предложения 4.4.23. ►

Рассмотрим теперь наиболее сложный случай, когда Γ является лог-терминальным деревом, причем Γ — либо связанное эллиптическое, либо связанное параболическое, но Γ не допускает слабой минимальной модели $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma^{\text{min}}$, отличной от $\Gamma^{\text{min}} = P_1$, либо Γ — ланнеровское дерево, но Γ не содержит параболических поддеревьев \mathcal{S} , слабая минимальная модель которых $\tau: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^{\text{min}}$ отлична от $\mathcal{S}^{\text{min}} = P_1$.

В этом случае нам понадобятся следующие понятия. Пусть Γ — связанное лог-терминальное дерево с простыми ребрами. Напомним, что последовательность вершин $C = v_0, v_1, \dots, v_n, n \geq 0$, дерева Γ называется цепью, если все вершины v_0, v_1, \dots, v_n различны и вершина v_i соединяется ребром с вершиной v_{i+1} для всех $0 \leq i \leq n-1$. Цепь $C = v_0, \dots, v_n$ вершин дерева Γ называется цепью 1-го рода, если v_0, v_1, \dots, v_n дают последовательность весов $(1, 2, \dots, 2)$ и цепь v_0, v_1, \dots, v_n является концом дерева Γ , т.е. единственная вершина v_i цепи v_0, \dots, v_n , которая может соединяться ребрами с вершинами Γ , отличными от v_0, \dots, v_n , это вершина v_0 , причем из вершины v_0 в другие вершины $v \in \Gamma, v \neq v_i, i = 0, \dots, n$, может выходить не более одного ребра. Если такое ребро существует, то вершина v определена однозначно и называется вершиной, из которой выходит цепь 1-го рода C . Вершина v_0 называ-

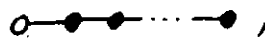
ется началом цепи 1-го рода C . Из определения следует, что вершина v_n является концом дерева Γ . Она называется концом /или концевой вершиной/ цепи 1-го рода Γ . /Например, графы $G_3'(1, 1, v)$ и $G_1''(1, v, 2)$ таблицы 5 не имеют цепей 1-го рода./ Выбросим из дерева Γ все цепи 1-го рода. Оставшийся граф Γ_0 называется осью дерева Γ . Из определения цепей 1-го рода следует, что ось Γ_0 является связным /может быть, пустым/ деревом. Имеет место следующее утверждение, доказанное в [13] /близкое утверждение также содержится в [12]/.

Теорема 4.4.26. Пусть Γ — связное лог-терминальное дерево с простыми ребрами, которое либо эллиплично, либо параболично, но не допускает слабой минимальной модели $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma^{wmin}$, отличной от $\Gamma^{wmin} = P_1$, либо ланнеровское, но не содержащее параболических поддеревьев \mathcal{S} , слабая минимальная модель которых $\tau: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^{wmin}$ отлична от $\mathcal{S}^{wmin} = P_1$.

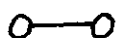
Тогда:

а/ Ось Γ_0 либо пуста, либо является цепью, либо является деревом, состоящим ровно из трех концов /т.е. состоит из трех цепей, выходящих из одной вершины/.

б/ Если ось Γ_0 пуста, то граф Γ имеет вид



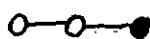
если Γ эллиптивен,



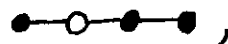
или



если Γ параболичен,



или



если Γ ланнеровский.

в/ Если ось Γ_0 не пуста, то каждая цепь 1-го рода выходит из некоторой вершины оси Γ_0 , различные цепи 1-го рода не имеют общих вершин и не соединяются ребрами в графе Γ .

Доказательство. Предположим, что две различные цепи 1-го рода C_1 и C_2 имеют общие вершины. Из определения цепей 1-го рода следует, что одна из цепей, скажем C_1 , имеет не менее двух вершин, цепи C_1 и C_2 имеют общими вершинами лишь общую вершину 1-го рода, при этом дерево Γ исчерпывается объединением этих цепей /в частности, Γ_0 пусто/. Отсюда и того, что цепь из трех вершин с последовательностью весов $(2, 1, 2)$ параболична, вытекает, что в этом случае Γ - один из графов, указанных в условии б/ теоремы. Аналогично, если две различные цепи 1-го рода C_1 и C_2 не имеют общих вершин, но соединяются ребрами, то их соединяет единственное ребро, между их вершинами 1-го рода, дерево Γ исчерпывается объединением цепей C_1 и C_2 /в частности, ось Γ_0 пуста/. Отсюда и того, что цепь из двух вершин 1-го рода параболична, следует, что граф Γ имеет один из видов, указанных в условии б/. Это доказывает утверждения б/ и в/.

Докажем теперь а/, предполагая, что ось Γ_0 не пуста и в силу в/ любые две различные цепи 1-го рода не имеют общих вершин и не соединяются ребром.

В доказательстве этого нам понадобится понятие скелета, заимствованное из [12]. Пусть Γ связное лог-терминальное дерево с простыми ребрами и $\beta: \Gamma \rightarrow \Gamma^{w_{min}}$ - последовательность слабых стягиваний вершин 1-го рода на слабо минимальную модель. Вершина v графа Γ называется отмеченной, если выполнено одно из условий:

$i/ v = \sigma^{-1}(a)$, где a — вершина $\Gamma^{\omega \min}$,
 $ii/$ из вершины v выходят по крайней мере три ребра,
 $iii/$ вершина v второго рода и существует единственная цепь
 $v = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = \omega$, в Γ , соединяющая v с
 отмеченной вершиной ω , удовлетворяющей $i/$ или $ii/$, причем
 все промежуточные вершины v_2, \dots, v_{n-1} 2-го рода /ясно, что
 промежуточные вершины v_2, \dots, v_{n-1} тоже удовлетворяют $iii/$ и
 поэтому отмечены/. Скелетом $Sk(\Gamma)$ дерева Γ называется по-
 ддерево дерева Γ , состоящее из всех отмеченных вершин и
 всех вершин, лежащих на соединяющих их цепях из Γ . Из опреде-
 ления следует, что скелет $Sk(\Gamma)$ является связным деревом.
 Важнейшее свойство скелета заключается в следующем утверждении,
 доказанном в [12].

Предложение 4.4.27. Пусть Γ — связное лог-терминальное эллиптическое, параболическое или ланнеровское дерево,

$\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma^{\omega \min}$ — последовательность слабых стягиваний вер-
 шин 1-го рода на слабо минимальную модель $\Gamma^{\omega \min}$. Пусть либо
 $\Gamma^{\omega \min} \neq \emptyset$, либо Γ не является цепью. Тогда $Sk(\Gamma)$
 не пусто, связно и имеют место следующие утверждения:

$$a/ \Gamma \setminus Sk(\Gamma) = \bigcup_{i \in I} C^i$$

является несвязным объединением цепей; каждая цепь C^i начина-
 ется с вершины v_0^i 1-го рода, соединяющейся ребром с одной из
 вершин $Sk(\Gamma)$, и заканчивается концевой вершиной дерева Γ .

$b/$ Если $\tau: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ — последовательность стягиваний всех
 промежуточных вершин 1-го рода, лежащих на цепях, соединяющих
 отмеченные вершины $Sk(\Gamma)$ /при этом сами отмеченные верши-
 ны не стягиваются/, то τ не меняет цепей C^i , имеет место
 коммутативная диаграмма стягиваний

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma^{wmin} \\ & \searrow \tau & \nearrow \sigma_1 \\ & \tilde{\Gamma} & \end{array}$$

и ограничение τ на $Sk(\Gamma)$ дает стягивание $Sk(\Gamma)$ на слабо минимальную модель $Sk(\Gamma)^{wmin} \subset \tilde{\Gamma}$. В частности, τ обратное последовательности раздутий ребер, происходящих из $Sk(\Gamma)^{wmin}$.

Доказательство. Если или $\Gamma^{wmin} \neq \emptyset$, или Γ не является цепью, то из определения скелета следует, что $Sk(\Gamma) \neq \emptyset$. Так как $Sk(\Gamma)$ содержит все вершины Γ , из которых выходит более двух ребер, то $\Gamma \setminus Sk(\Gamma)$ состоит из нескольких несвязанных друг с другом цепей C^i , причем одна из концевых вершин v_0^i каждой такой цепи C^i соединяется ребром с одной из вершин $v_i \in Sk(\Gamma)$, другая концевая вершина цепи C^i является, очевидно, концом дерева Γ . Если v_i — концевая вершина

$Sk(\Gamma)$, то из определения $Sk(\Gamma)$ следует, что v_i отмечена. В этом случае, если v_i — вершина 2-го рода, то v_i удовлетворяет условию *iii*/ и тоже принадлежит скелету, что невозможно. Если v_i не является концевой вершиной $Sk(\Gamma)$, то из v_i выходит по крайней мере три ребра /одно из них в v_0^i /, поэтому v_i также отмечена. Отсюда точно так же, как выше, получаем, что v_0^i — вершина 1-го рода.

Последовательность стягиваний τ очевидно не задевает цепей C^i , так как каждая такая цепь C^i выходит из отмеченной вершины $v_i \in Sk(\Gamma)$, а отмеченные вершины $v \in Sk(\Gamma)$ не стягиваются. Существование коммутативной диаграммы стягиваний

σ, τ, σ_1 следует из леммы 4.4.24. Из определения τ и $Sk(\Gamma)$ следует, что для вершины $v \in Sk(\Gamma)$ вершина $\tau(v)$ второго рода, если вершина v не является отмеченной. Иначе v

является промежуточной вершиной цепи, соединяющей отмеченные вершины, и поэтому стягивается τ . Пусть $v \in Sk(\Gamma)$ — отмеченная вершина. Если v удовлетворяет условию $iii/$, то, очевидно, вес v не меняется и $\tau(v)$ — вершина второго рода. Если вершина v удовлетворяет условию $ii/$, то из вершины $\tau(v)$ по-прежнему выходит более трех ребер. Если при этом вершина $\tau(v)$ первого рода, то вершина $\tau(v)$ не стягивается последовательностью стягиваний β_1 , так как иначе β не будет последовательностью слабых стягиваний. Поэтому вершина v удовлетворяет условию $i/$. Остается рассмотреть случай, когда v удовлетворяет условию $i/$ и $\tau(v)$ — вершина 1-го рода. Тогда, очевидно, и вершина $\sigma(v)$ — вершина 1-го рода. Отсюда следует, что из вершин $\sigma(v)$ в графе $\Gamma^{w_{min}}$ выходит по крайней мере три ребра. Из определения $Sk(\Gamma)$ и τ вытекает, что тогда и из вершины $\tau(v)$ выходят три ребра из подграфа $Sk(\Gamma)$. Это доказывает, что $\tau(Sk(\Gamma)) = Sk(\Gamma)^{w_{min}}$ является слабо минимальным лог-терминальным графом. \blacktriangleright

Продолжим доказательство теоремы.

Воспользуемся предложением 4.4.27. Пусть

$$\Gamma - Sk(\Gamma) = \bigcup_{i \in I} C^i.$$

Пусть I_1 — подмножество I , состоящее из цепей C^i 1-го рода. Пусть $I_2 = I - I_1$ — множество остальных цепей, называемых цепями 2-го рода. Очевидно, достаточно доказать, что поддерево дерева Γ , образованное $Sk(\Gamma) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} C^i \right)$, имеет не более трех концов. Каждая цепь C^i , $i \in I_2$, начинается с последовательности вершин $v_0^i, v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$.

образующих последовательность весов $(1, 2, \dots, 2, m_i)$, где $m_i \geq 3$. Пусть $\tilde{c}^i = v_0^i, v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$ — цепь, образованная этими вершинами. Достаточно доказать, что поддерево дерева Γ , образованное $sk(\Gamma) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} \tilde{c}^i \right)$,

имеет не более трех концов. Обозначим через $\tilde{\tau}$ стягивание всех последовательностей вершин $v_0^i, v_1^i, \dots, v_{n_i-1}^i$, где i пробегает I_2 . Стягивания τ /из предложения 4.4.27/ и $\tilde{\tau}$ коммутируют, и их композиция дает последовательность слабых стягиваний

$$\bar{\sigma} : sk(\Gamma) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} \tilde{c}^i \right) \rightarrow \overline{sk(\Gamma)^{\min}} \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} \bar{v}_{n_i}^i \right),$$

где $\overline{sk(\Gamma)^{\min}} = \bar{\sigma}(sk(\Gamma)) = \tilde{\tau}(sk(\Gamma)^{\min})$

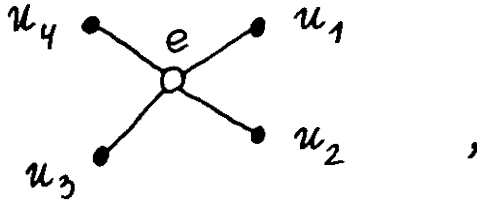
и $\bar{v}_{n_i}^i = \bar{\sigma}(v_{n_i}^i) = \tau(\tilde{\tau}(v_{n_i}^i))$ — вершина веса $m_i - 1 \geq 2$. Достаточно доказать, что дерево $T = \overline{sk(\Gamma)^{\min}} \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} \bar{v}_{n_i}^i \right)$

имеет не более трех концов. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть дерево T не содержит вершин 1-го рода. Тогда T — минимальное связанное эллиптическое, параболическое или ланнеровское лог-терминальное дерево без вершин 1-го рода. Из условия теоремы и описания минимальных лог-терминальных графов в теоремах 4.4.II, 4.4.I3 и 4.4.I5 сразу получаем, что T имеет не более трех концов.

Пусть дерево T содержит вершину e 1-го рода, из которой выходит по крайней мере три ребра в различные вершины u_1, u_2, u_3 . По следствию 4.4.I2 поддерево $[e, u_1, u_2, u_3]$ в T , натянутое на e, u_1, u_2, u_3 , параболично или гиперболично. Так как T — эллиптическое, связанное параболическое или ланнеровское

кое дерево, то отсюда следует, что T содержит не более пяти вершин. Так как T - связное дерево, то в этом случае T содержит более 3-х концов в единственном случае: T состоит из вершин e, u_1, u_2, u_3, u_4 и имеет вид



где u_1, u_2, u_3, u_4 - вершины 2-го рода. Тогда T - слабо минимальное эллиптическое, параболическое или ланнеровское лог-терминальное дерево. Из предложения 4.4.20 и 4.4.21 следует, что T совпадает с ланнеровским деревом G_7' таблицы 5 предложения 4.4.21. Но это противоречит условию теоремы, так как тогда поддерево $[e, u_1, u_2, u_3]$ совпадает с P_6 .

Остается рассмотреть случай, когда из каждой вершины 1-го рода дерева T выходит не более двух ребер. Пусть e - такая вершина. Из построения T получаем, что вершина e принадлежит $\overline{Sk(\Gamma)^{wmin}}$. Если вершина e не соединяется ребрами

с вершинами $\bigcup_{i \in I_2} \overline{v}_{n_i}^i$, то мы получаем противоречие со слабой минимальностью $\overline{Sk(\Gamma)^{wmin}}$. Поэтому вершина e соединяется ребрами с вершинами $\bigcup_{i \in I_2} \overline{v}_{n_i}^i$. Если таких ребер два,

то в силу связности T и того, что из e выходит не более двух ребер, сразу получаем, что T является цепью из трех вершин, что и нужно. Поэтому мы можем считать, что всякая вершина e 1-го рода дерева T соединяется ребром с ровно одной вер-

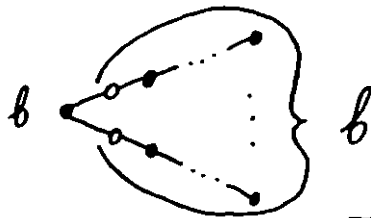
шиной $v \in \bigcup_{i \in \Gamma_2} \overline{v}^i_{n_i}$ и является концевой вершиной дерева:

$\overline{sk(\Gamma)}^{min}$. Отбросим от T все такие пары вершин v, e . В результате мы получим поддерево $T' \subset T$, которое является связным, не содержит вершин 1-го рода, и для которого достаточно доказать наше утверждение: T' имеет не более трех концов. Но доказательство этого /с заменой T' на T / мы уже дали выше. Это завершает доказательство теоремы. ►

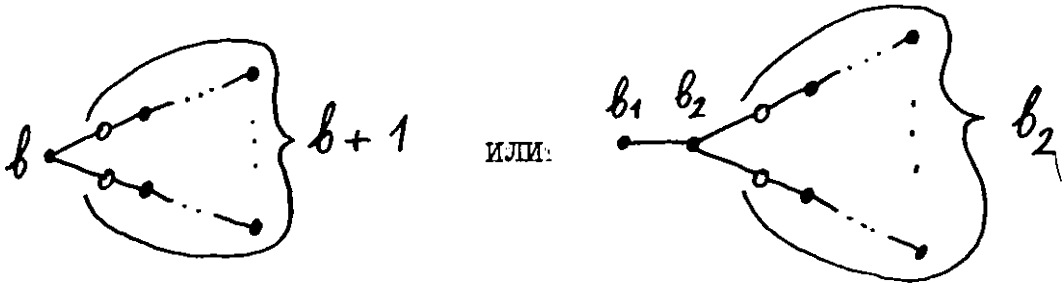
Отметим также следующее простое, но полезное утверждение.

Предложение 4.4.28. В предположениях теоремы 4.4.26 имеем: Общее число вершин цепей 1-го рода, выходящих из вершины веса v оси Γ_0 , не превосходит $v-1$, исключая следующие случаи:

v_1 / Γ параболический и Γ_0 содержит одну вершину, и Γ имеет вид:



v_2 / Γ ланнеровский, и Γ_0 содержит одну или две вершины, и Γ имеет вид /где $v \geq 1$, $v_1 \geq 2$, $v_2 \geq 1$ /:



Доказательство предоставляется читателю. ►

Продолжим изучение лог-терминальных графов Γ теоремы 4.4.26. Чтобы не исключать из дальнейшего рассмотрения графы Γ , удовлетворяющие условию б/ теоремы 4.4.26 или условию в₁/ или в₂/ предложения 4.4.28, следует к оси Γ_0 добавить одну или две цепи 1-го рода /или это считать осью Γ / так, чтобы сохранялись утверждения теоремы 4.4.26 и предложения 4.4.28: ось имеет два конца, суммарное число вершин цепей первого рода, выходящих из вершины веса v оси, не превосходит $v-1$.

Стянем все вершины осей 1-го рода графа Γ на ось Γ_0 /ясно, что это делается канонически/. При этом получится граф Γ'_0 , который отождествляется с осью Γ_0 , но вес v'_i вершины v'_i графа Γ'_0 , соответствующей вершине v_i оси Γ_0 , станет равен $v'_i = v_i - t_i$, где v_i - вес v_i , а t_i - суммарное число вершин цепей 1-го рода, выходящих из v_i . Мы будем называть Γ'_0 новой осью Γ . По теореме 4.4.26 новая ось Γ'_0 имеет не более трех концов.

На следующем шаге стянем все вершины 1-го рода концов Γ'_0 такие, из которых выходят ровно два ребра /другими словами, эти стягивания обратны раздутиям ребер/. Полученное дерево Γ''_0 называется редуцированной осью Γ . Редуцированная ось Γ''_0 , очевидно, имеет столько же концов, сколько и Γ_0 и Γ'_0 , т.е. не больше трех. Все вершины 1-го рода редуцированной оси Γ''_0 являются либо концевыми вершинами Γ''_0 , либо центральной вершиной, если Γ''_0 имеет три конца. При этом при слабом стягивании могут стягиваться лишь концевые вершины 1-го рода. Учитывая это, то, что слабая минимальная модель Γ''_0 суть $G_3(1, 1, v)$, $G_1''(1, v; 2)$, $G_2(1, 1, v)$, если Γ - ланнеровский, P_1 , если Γ параболичен, и графы $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$ таблицы 1, если

Γ эллиптический, а также то, что вершины второго рода Γ_0'' образуют один из графов $\Gamma_1 - \Gamma_{17}$, если центральная вершина Γ_0'' второго рода, сразу получаем

Теорема 4.4.29. Пусть Γ удовлетворяет условию теоремы 4.4.26, и Γ_0'' - его редуцированная ось. Тогда:

а/ $\Gamma_0'' = G_3'(1, 1, \theta)$ или $G_1''(1, \theta; 2)$, если Γ - ланнеровский и слабая минимальная модель Γ_0'' суть $G_3'(1, 1, \theta)$ или $G_1''(1, \theta; 2)$.

Γ_0'' совпадает с одним из графов а/ - е/ таблицы 8, если Γ ланнеровский и слабая минимальная модель Γ_0'' есть $G_2(1, 1, \theta)$.

б/ Γ_0'' совпадает с одним из графов а/ - о/ таблицы 7, если Γ параболический /минимальная модель Γ_0'' есть P_1 /.

в/ Γ_0'' получается из графов а/ - з/ таблицы 6 отбрасыванием нескольких /может быть, ни одной/ вершин 1-го рода и из графов а/ - о/ таблицы 7 отбрасыванием нескольких и по крайней мере одной вершины 1-го рода.

Доказательство приведено выше, требуемые вычисления очень просты и предоставляются читателю. ►

Наконец, следующее важное соображение, принадлежащее В.А.Алексееву /см. [2], а также [12]/, позволяет учесть почти дельпещцовость или дельпещцовость лог-терминальной системы.

Пусть \mathcal{V} - лог-терминальная система векторов, для которой определен $K(\mathcal{V})$. То есть, если \mathcal{V} - система векторов линейного пространства V с симметрической билинейной формой, то существует элемент $K(\mathcal{V}) \in V^*$, обладающий свойством:

$$K(\mathcal{V}) \cdot v = -v^2 - 2 \quad \text{для всех } v \in \mathcal{V}.$$

Пример, $K(\mathcal{V})$ определен для любой эллиптической, связной параболической или ланнеровской системы. Пусть $K(\mathcal{V}^{\geq 2}) = \sum \alpha_j f_j$, где $f_j \in \mathcal{V}^{\geq 2}$ и $-1 < \alpha_j \leq 0$, $\tau: \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathcal{V}}$ - последовательность стягиваний векторов 1-го рода. Тогда для $\overline{\mathcal{V}}$ также определен

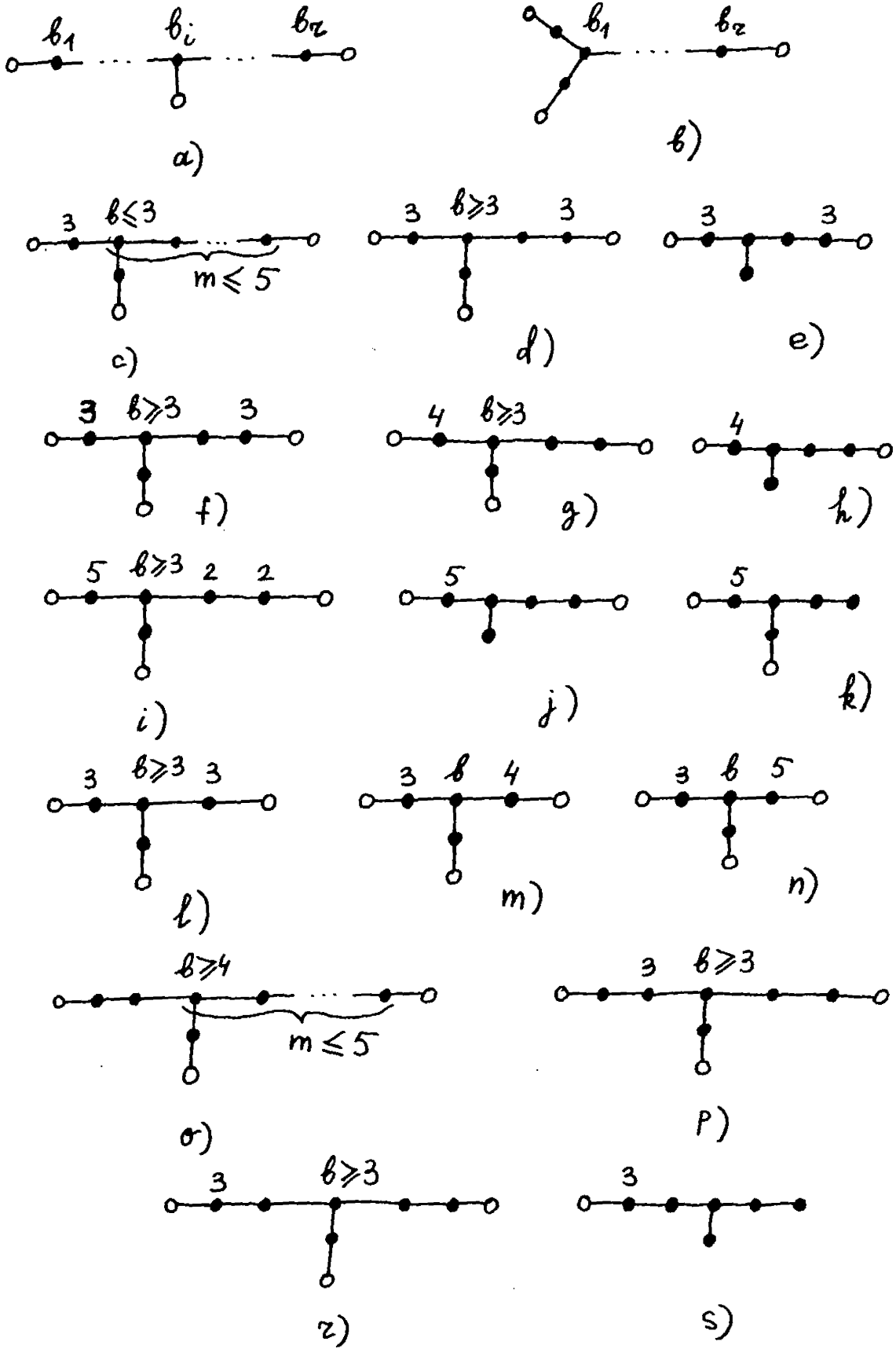


Таблица 6. ($b \geq 2, b_i \geq 2$)

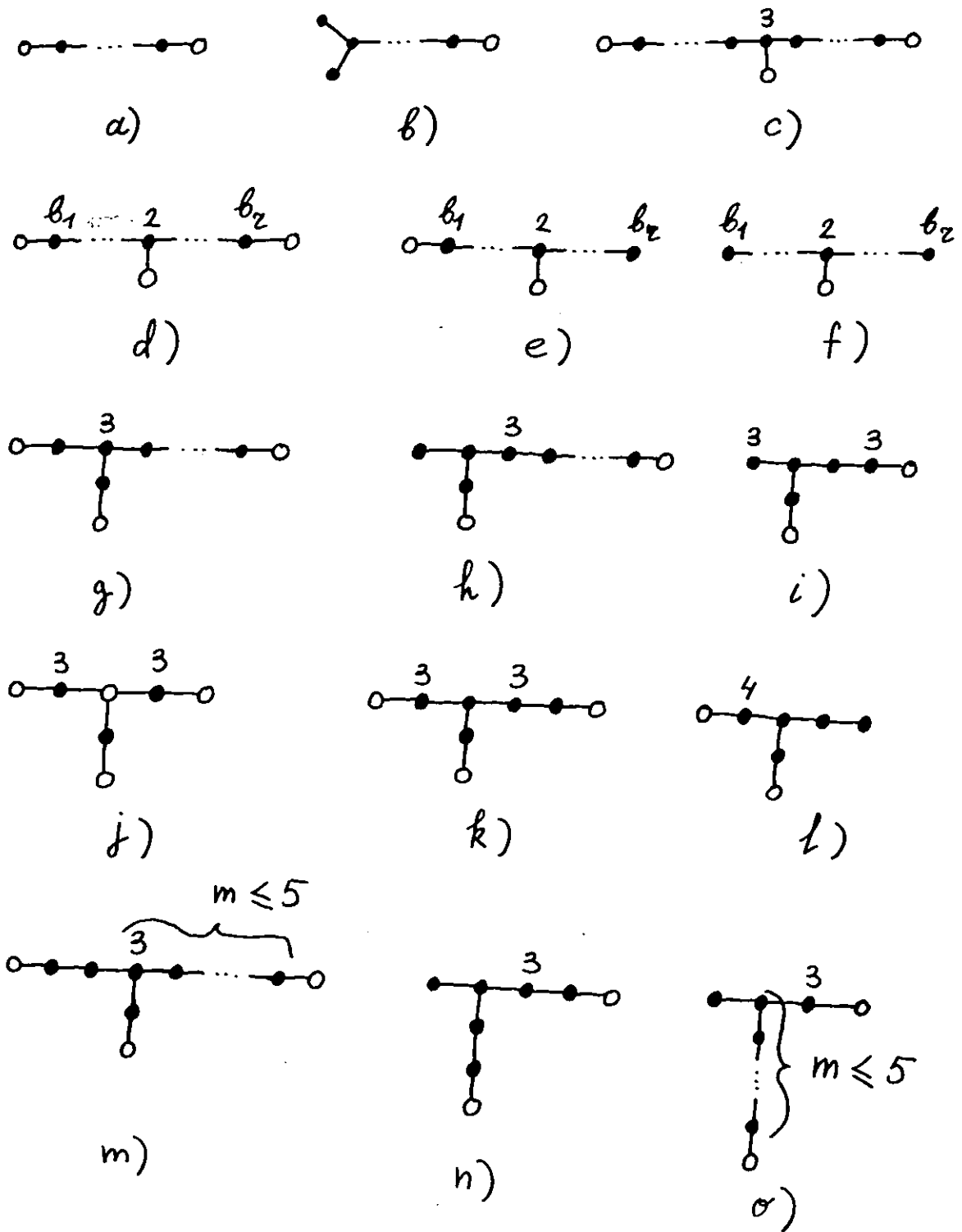
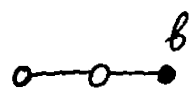


Таблица 7. ($b \geq 2$, $b_i \geq 2$)



a) $G_2(1, 1, b), b \geq 1$.

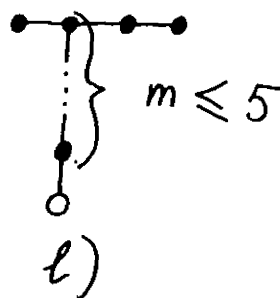
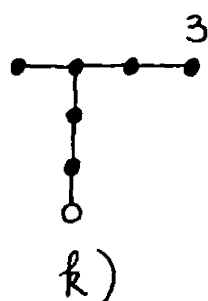
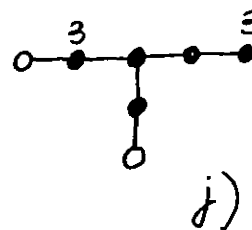
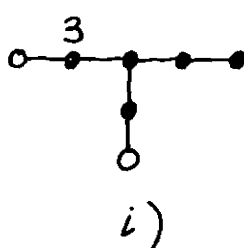
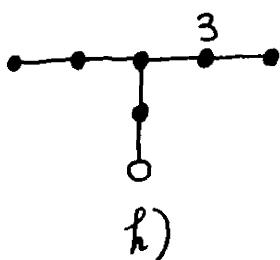
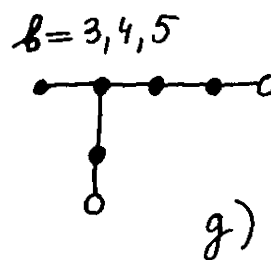
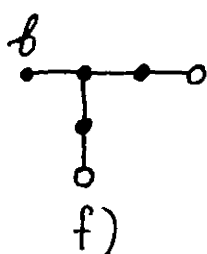
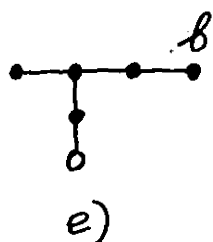
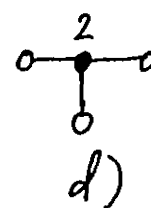
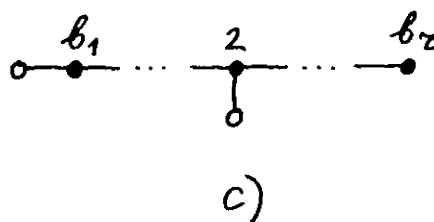
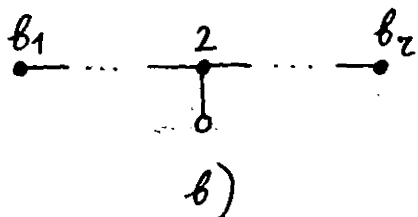


Таблица 8. ($b \geq 2, b_i \geq 2$)

$K(\bar{V})$. Для "дивизора" $\bar{C} = \sum t_i \bar{v}_i$, $\bar{v}_i \in \bar{V}$, $t_i \in \mathbb{N}$,
можно определить "арифметический род"

$$p_a(\bar{C}) = (\bar{C}^2 + \bar{C} \cdot K(\bar{V})) / 2 + 1.$$

Ясно, как определить $C = \tau^* \bar{C}$, и пусть

$$C = \tau^* \bar{C} = \sum_i a_i e_i + \sum_j b_j f_j \text{ где } e_i \in \mathcal{V}^1 \text{ и } f_j \in \mathcal{V}^{\geq 2}.$$

Лемма /В.А.Алексеев [2] / 4.4.30. В предположениях выше
имеют место следующие равенство и неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \eta(e_i, \mathcal{V}^{\geq 2}) &= 2(1 - p_a(\bar{C})) + \bar{C} \cdot (\bar{C} + \sum_j \alpha_j \tau_*(f_j)) \leq \\ &\leq 2(1 - p_a(\bar{C})) + \bar{C}^2 - \sum_k g_k \cdot \bar{C}, \end{aligned}$$

где $-1 < \alpha_j \leq 0$ и g_k пробегает векторы из \bar{V} такие, что $g_k \cdot \bar{C} < 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \eta(e_i, \mathcal{V}^{\geq 2}) &= -\tau^* \bar{C} \cdot (K(\mathcal{V}) - K(\mathcal{V}^{\geq 2})) = \\ &= -(\tau^* \bar{C}) \cdot K(\mathcal{V}) + (\tau^* \bar{C}) \cdot K(\mathcal{V}^{\geq 2}) = \\ &= -\bar{C} \cdot K(\bar{V}) + \bar{C} \cdot \tau_* K(\mathcal{V}^{\geq 2}) = \\ &= 2(1 - p_a(\bar{C})) + \bar{C}^2 + \bar{C} \cdot \sum_j \alpha_j \tau_*(f_j) \leq \\ &\leq 2(1 - p_a(\bar{C})) + \bar{C}^2 - \sum_k g_k \cdot \bar{C}. \end{aligned}$$

так как $0 \geq \alpha_j > -1$. \blacktriangleright

Отметим следующие важные следствия этой леммы, относящиеся к случаям, когда \mathcal{V} - эллиптическая, параболическая или ланнеровская лог-терминальная система и $\tau: \mathcal{V} \rightarrow \bar{V}$ - стягивание на минимальную или слабо минимальную модель.

/i/ Пусть \mathcal{V} - эллиптическая лог-терминальная система.

$\bar{\gamma} = \gamma^{\min}$ и \bar{c} - фундаментальный цикл /см. [17]/ для γ^{\min} , т. е.

$$\bar{c} = \sum_{\bar{v}_i \in \gamma^{\min}} t_i \bar{v}_i,$$

где $t_i \in \mathbb{N}$, обладает свойствами: $\bar{c} \cdot \bar{v}_i \leq 0$ для всех $\bar{v}_i \in \gamma^{\min}$ и \bar{c} имеет наименьшие возможные коэффициенты t_i для цикла \bar{c} с такими свойствами. В этом случае: $\rho_\alpha(\bar{c}) = 0$ и равенство в лемме 4.4.30 дает

$$\sum_i \alpha_i \eta(e_i, \gamma^{\geq 2}) < 2. \quad /4.12/$$

/ ii / Пусть γ - параболическая связная лог-терминальная система, $\bar{\gamma} = \gamma^{\min}$ и $\bar{c} = \sum t_i \bar{v}_i$, $t_i \in \mathbb{N}$, обладает свойствами: $\bar{c} \cdot \bar{v}_i = 0$ для всех $\bar{v}_i \in \gamma^{\min}$ и t_i - наименьшие с такими свойствами / \bar{c} называется фундаментальным нулем системы $\bar{\gamma}$ /. В этом случае, очевидно, $c = \tau^* \bar{c}$ - также фундаментальный нуль и равенство в лемме 4.4.30 дает

$$\sum_i \alpha_i \eta(e_i, \gamma^{\geq 2}) = 0, \quad /4.13/$$

если $\gamma^{\min} = \tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, P_2$ /ибо в этих случаях $\rho_\alpha(\bar{c}) = 1$ /, и

$$\sum_i \alpha_i \eta(e_i, \gamma^{\geq 2}) = 2, \quad /4.14/$$

если $\gamma^{\min} = P_1$ /ибо в этом случае $\rho_\alpha(\bar{c}) = 0$ /.

/ iii / Пусть $\bar{\gamma} = \gamma^{\min}$ - минимальная ланнеровская система $G_1(1, \nu; 2)$, где $\nu = 1, 2, 3$, и $\bar{c} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, где $\bar{\gamma} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$. В этом случае из неравенства леммы 4.4.30

получаем.

$$\sum_i \alpha_i \eta(a_i, \gamma \geq 2) \leq 3 - b + \begin{cases} 0, & \text{если } b = 1, 2, \\ 1, & \text{если } b = 3 \end{cases} \leq 2 \quad /4.15/$$

/в этом случае $p_a(\bar{c}) = 1$ /. Пусть $\bar{\gamma} = \gamma^{\min}$ — минимальная ланнеровская система $G_3(1, 1, b)$ /см. таблицу 3, б//, где $b \geq 1$, и $\bar{c} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$, где $\bar{\gamma} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. В этом случае из неравенства леммы 4.4.30 получаем:

$$\sum_i \alpha_i \eta(e_i, \gamma \geq 2) \leq \begin{cases} 2, & \text{если } b > 1; \\ 3, & \text{если } b = 1 \end{cases} \quad /4.16/$$

/в этом случае $p_a(\bar{c}) = 1$ /. Пусть $\bar{\gamma} = \gamma^{\min}$ — минимальная ланнеровская система $G_2(1, 1, b)$ /см. таблицу 3, б//, где $b \geq 1$, и $\bar{c} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$, где $\bar{\gamma} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. В этом случае из неравенства леммы 4.4.30 получаем.

$$\sum_i \alpha_i \eta(e_i, \gamma \geq 2) \leq 3 \quad /4.17/$$

/в этом случае $p_a(\bar{c}) = 0$ /.

4.5⁰. Типы и инварианты поверхностей с численно эффективным антиканоническим классом и лог-терминальными особенностями. Пусть Z - такая поверхность и $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z . Наша задача - получение оценок на $\rho(Y) = \text{rk } NS(Y)$ и следствий из этих оценок. Поэтому в силу предложения 4.2.1 мы можем считать, что Y и Z рациональны. В дальнейшем мы будем это предполагать. Мы скажем, что Z является почти поверхностью дель Пеццо, если $-K_Z$ является nef и $-\sigma^*K_Z \cdot E > 0$ для всякой исключительной кривой 1-го рода E на Y . Это эквивалентно тому, что система исключительных кривых $E_{\text{ex}}(Y)$ является дельпецовской лог-терминальной. Заметим, что для почти поверхности дель Пеццо Z класс $K_Z \equiv 0$. Действительно, Y рациональна, поэтому для $\rho(Y) \geq 3$ поверхность Y содержит хотя бы одну исключительную кривую E 1-го рода, для которой $-E \cdot \sigma^*K_Z > 0$. Если же $\rho(Y) \leq 2$, то Y изоморфна F_n или P_2 , и непосредственно проверяется, что

$K_Z \neq 0$. Поэтому случаи, когда Z является почти поверхностью дель Пеццо, соответствуют эллиптическому ($(K_Z^2) > 0$) или параболическому ($K_Z^2 = 0$ и $K_Z \neq 0$) случаям.

В дальнейшем мы различаем следующие четыре возможности:

1) Z является почти поверхностью дель Пеццо, причем этот случай распадается на два подслучая: 1а) $K_Z^2 > 0$; 1в) $K_Z^2 = 0$ и $K_Z \neq 0$.

2) $-K_Z$ - nef и Z соответствует эллиптическому случаю, т.е. $K_Z^2 > 0$.

3) $-K_Z$ - nef и Z соответствует параболическому случаю, т.е. $K_Z^2 = 0$ и $K_Z \neq 0$.

4) Z соответствует гиперболическому случаю, т.е. $K_Z \equiv 0$.

Для поверхностей Z мы можем ввести следующие инварианты: Прежде всего, в формуле

$$K_Z = \sigma^*K_Z + \sum \alpha_i F_i, \quad (5.1)$$

соответствующей минимальному разрешению особенностей $\sigma: Y \rightarrow Z$, пусть $k(Z)$ - наименьшее общее кратное знаменателей α_i . Натуральное число $k(Z)$ называется индексом Z . Очевидно, что $k(Z)$ является наименьшим общим кратным индексов особенностей Z (см. 4.1⁰).

Далее, для $K_Z \neq 0$ пусть $K_Z = gh$, где h - примитивный элемент решетки классов по численной эквивалентности дивизоров Картье на Z . Рациональное число $g \in \mathbb{Q}$ называется дробным индексом поверхности Z . Нетрудно видеть, что $\sigma^*K_Z = gh'$, где h' - примитивный элемент решетки Нерона - Севери $NS(Y)$ (очевидно, $h' = \sigma^*h$), - и это дает другое определение дробного индекса. Так как решетка Нерона - Севери унимодулярна, то g равно наибольшему общему делителю рациональных чисел

$$\{ x \cdot \sigma^*K_Z \mid x \in NS(Y) \}.$$

Для $\rho(Y) > 2$ решетка $NS(Y)$ порождена исключительными кривыми (так как Y рациональна), поэтому для $\rho(Y) > 2$

$$g = \text{НО.Д.} \{ E \cdot \sigma^*K_Z \mid E \in \text{Exc}(Y)^1 \}.$$

Если $\rho(Y) < 3$, то Y - это поверхность \mathbb{P}^2 или F_n . Если $Y = \mathbb{P}^2$, F_0 или F_1 , то $Z = Y$ и $\tau(\mathbb{P}^2) = 3$, $\tau(F_0) = 2$, $\tau(F_1) = 1$. Если $Y = F_2$, то либо $Z = Y = F_2$, либо Z получается стягиванием исключительной кривой с квадратом -2 на Y . В обоих случаях $\tau(Z) = 2$. Если $Y = F_n$, $n > 2$, то Z получается стягиванием исключительной кривой с квадратом $-n$ на Y . В этом случае $\tau(Z) = 1 + 2/n$.

Для $\rho(Y) > 2$, когда множество $\text{Exc}(Y)^1 \neq \emptyset$, следуя В.А.Алексеву [2], введем инвариант

$$\epsilon(Z) = \min \{ -\sigma^*K_Z \cdot E \mid E \in \text{Exc}(Y)^1 \text{ и } -\sigma^*K_Z \cdot E > 0 \}.$$

Так как множество $NS(Y) \cdot \sigma^*K_Z = g\mathbb{Z}$ дискретно, то данный минимум достигается, и для $\rho(Y) > 2$ и $K_Z \neq 0$ инвариант $\epsilon(Z)$ определен.

Мы хотим дать в следующих пунктах ограничение на $\rho(Y)$ при фиксированных: индексе $k(Z)$, дробном индексе $\tau(Z)$, инварианте $\epsilon(Z)$ и $e(Z)$ - максимальной кратности особенностей Z . Отметим, что эти инварианты связаны неравенствами:

$$1/k(Z) \leq \tau(Z) \leq \epsilon(Z), \quad e(Z) \leq 2k(Z). \quad (5.2)$$

По поводу последнего неравенства см. [11].

4.6.0. Почти поверхности дель Пеццо с лог-терминальными особенностями. Следующая теорема для поверхностей дель Пеццо над \mathbb{C} с худшими чем у нас константами была доказана В.А.Алексеевым в [2]. Таким образом, мы обобщаем этот результат

на почти поверхности дель Пецо над произвольным алгебраически замкнутым полем.

Теорема 4.6.1. Пусть Z - почти поверхность дель Пецо с лог-терминальными особенностями над произвольным алгебраически замкнутым полем и $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z .

Тогда

$$\rho(Y) < \begin{cases} 96(5/\epsilon(Z) + 12) + 69, & \text{если } K_Z^2 > 0; \\ 96(5/\epsilon(Z) + 12) + 70, & \text{если } K_Z^2 = 0 \text{ и } K_Z \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство.

Лемма 4.6.2. Пусть L - ланнеровская дельпецовская лог-терминальная система векторов, для которой

$$\eta(\epsilon, L^{\geq 2}) \geq \epsilon > 0 \quad \forall \epsilon \in L^1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \#L &\leq 9/2\epsilon + 11, \\ \text{diam } L &\leq 3/\epsilon + 9. \end{aligned}$$

При этом, если $\#L \geq 6$ и $L^1 \neq \emptyset$, то L (граф Грама) является либо циклом, либо деревом, $L^{\min} = G_1(1, b; 2)$, $G_2(1, 1, b)$ или $G_3(1, 1, b)$ и для всякой параболической подсистемы $P \subset L$ имеем: $p^{\min} = P_1$. Имеют место следующие более точные оценки в зависимости от вида L :

$$\begin{aligned} &10, \text{ если } L^1 = \emptyset; \\ \#L &\leq \begin{cases} 2/\epsilon + 2, & \text{если } L \text{ является циклом,} \\ 3/\epsilon + 7/2, & \text{если } L \text{ - дерево и } L^{\text{wmin}} = G_1''(1, b; 2) \text{ или} \\ &G_3'(1, 1, b); \\ 9/2\epsilon + 11, & \text{если } L^{\min} = G_2(1, 1, b); \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &8, \text{ если } L^1 = \emptyset; \\ \#L &\leq \begin{cases} 1/\epsilon + 1, & \text{если } L \text{ - цикл;} \\ 2/\epsilon + 2, & \text{если } L \text{ - дерево и } L^{\text{wmin}} = G_1''(1, b, 2) \text{ или} \\ &G_3'(1, 1, b); \\ 3/\epsilon + 11, & \text{если } L^{\min} = G_2(1, 1, b); \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Разберем несколько случаев.

Пусть L минимальна. Пользуясь теоремой 4.4.15, сразу получаем описание дельпецовских графов L такого вида. Если L

состоит только из векторов 2-го рода, то из определения дельцепцовости сразу вытекает, что для $v \in L$ имеем: $v^2 = -2$, и для $\#L \geq 3$ по теореме 4.4.15 имеем: $L = G_7, G_8, G_9, G_{10}; St(A_n, 2), 1 \leq n \leq 7; St(D_n, 2), 4 \leq n \leq 8; St(E_n, 2), n = 6, 7, 8; G_3(2, 2, 2), G_5(2, 2, 2)$. Во всех этих случаях $K(L) = K(L^{\geq 2}) = 0$. Если L содержит вектора 1-го рода и L допускает раздутия до лог-терминальной системы, содержащей по крайней мере 4-е вектора, то $L = G_1(1, 1; 3); G_1(1, b; 2), b = 1, 2, 3; G_2(1, 1, b), b \geq 1; G_3(1, 1, b)$. В любом случае $\#L \leq 10, \text{diam } L \leq 8$.

Пусть L содержит параболическую подсистему P , допускающую последовательность стягиваний $\tau: P \rightarrow \bar{P}$, где \bar{P} - параболическая система $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, P_2$. Стягивание τ продолжается до стягивания $\tilde{\tau}: L \rightarrow \bar{L}$. Из формулы (4.13) в этом случае получаем, что $\tilde{\tau}$ тождественно, $L = \bar{L}$, и L содержит параболическую подсистему $P = \tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$, или P_2 . Заметим, что случай P_2 невозможен, так как P_2 не является, очевидно, дельцепцовской системой, а подсистема дельцепцовской системы сама является дельцепцовской. Поэтому $P = \tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$. Пусть $v \in L$ и $v \notin P$. Если v - вектор 2-го рода, то L минимальна, и все такие случаи описаны выше. Если вектор v 1-го рода, то нетрудно видеть (фактически это доказано в предложениях 4.4.18, 4.4.19, 4.4.25), что в этом случае $L = G_2(2, 2; 1) = St(A_1, 1), St(A_n, 1), n = 2, 3; St(D_4, 1), G_3(2, 2, 1)$ (в обозначениях таблицы 3). В любом случае $\#L \leq 5, \text{diam } L \leq 3$.

Итак, мы показали, что для $\#L \geq 6$ и $L^1 \neq \emptyset$ для всякой параболической подсистемы $P \subset L$ имеем: $P^{\min} = P_1$. Отсюда и теоремы 4.4.15 получаем, что $L^{\min} = G_1(1, b; 2), G_2(1, 1, b)$ или $G_3(1, 1, b)$. Покажем, что в этом случае L (граф Грама) является циклом или деревом. Действительно, пусть $C \subset L$ - цикл. Тогда, по следствию 4.4.12, C не может быть эллиптичен. Если цикл C параболический, то, очевидно, $C^{\min} \neq P_1$, так как в противном случае C является деревом. Поэтому C гиперболический и, в силу ланнеровости, $L = C$. Это доказывает, что L является либо циклом, либо деревом. Разберем эти случаи.

Прежде всего, заметим, что если Γ - граф, состоящий из множества вершин $\{v_i\}$, $\bar{C} = \sum a_i v_i$ и раздувается полный подграф $\Gamma_1 \subset \Gamma$, состоящий из вершин v_1, \dots, v_k , то при этом раздутии σ имеем:

$$\sigma^* \bar{C} = \sum a_i \sigma^{-1}(v_i) + (a_1 + \dots + a_k)e, \quad (6.1)$$

где e - возникающая вершина 1-го рода.

Пусть L является циклом. Тогда, очевидно, $L^{\min} = G_1(1, b; 2)$ или $G_3(1, 1, b)$. Пусть $L^{\min} = G_1(1, b; 2)$, $L^{\min} = \{v_1, v_2\}$, $\bar{C} = v_1 + v_2$. Для промежуточных подграфов $L \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\tau_1} L^{\min}$ пусть

$$C = \tau_1 * \bar{C} = \sum a_i e_i + \sum b_j f_j,$$

где $e_i \in \Gamma^1$, $f_j \in \Gamma^{\geq 2}$, и

$$\Sigma(\Gamma) = \sum a_i.$$

Так как L является циклом, то, очевидно, L получается из $G_1(1, b; 2)$ в результате последовательности раздутий ребер. Из (6.1) тогда очевидно следует, что, при каждом раздутии, $\Sigma(\Gamma)$ увеличивается по крайней мере на 1, исключая 1-й шаг для $G_1(1, 1; 2)$. Это доказывает, что $\Sigma(L) \geq \#L - 2$. В силу (4.15) получаем, что $\Sigma(L) \leq 2/\epsilon$, откуда $\#L \leq 2/\epsilon + 2$ и $\text{diam } L \leq 1/\epsilon + 1$. Пусть $L^{\min} = G_3(1, 1, b)$. В этом случае точно так же, как выше, пользуясь (4.16), получаем, что если $b > 1$, то $\#L \leq 2/\epsilon + 2$ и $\text{diam } L \leq 1/\epsilon + 1$. Случай $L^{\min} = G_3(1, 1, 1)$ необходимо разобрать отдельно. Пусть \bar{L} получен из L^{\min} раздутием одного ребра, $\bar{L} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, и $\bar{C} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Ясно, что L получается из \bar{L} раздутием ребер, и неравенство леммы 4.4.30 дает: $\sum a_i \eta(e_i, L^{\geq 2}) \leq 2$. Далее как выше получаем, что $\#L \leq 2/\epsilon + 2$ и $\text{diam } L \leq 1/\epsilon + 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда L является деревом. В этом случае, как мы показали выше, L удовлетворяет условиям теорем 4.4.26 и 4.4.29. Пусть L_0'' - редуцированная ось L . Ее слабая минимальная модель (совпадающая, очевидно, с L^{wmin}) есть $G_3'(1, 1, b)$, $G_1''(1, b, 2)$ или $G_2(1, 1, b)$. Разберем эти случаи.

Пусть $L^{\text{wmin}} = G_3'(1, 1, b)$, $b \geq 1$, или $G_1''(1, b, 2)$, $b=1, 2, 3$. В этих случаях по теореме 4.4.29 редуцированная ось L_0'' совпадает с L^{wmin} . Рассмотрим промежуточные графы

$$L \rightarrow \Gamma \rightarrow L^{\text{wmin}} \rightarrow L^{\min}$$

Пусть для $L^{\min} = \{v_i\}$ цикл $\bar{C} = \sum v_i$ и, как выше, $\Sigma(\Gamma) = \sum a_i$, где $\tau_1 * \bar{C} = \sum a_i e_i + \sum b_j f_j$, $e_i \in \Gamma^1$, $f_j \in \Gamma^{\geq 2}$. Так как $L_0'' = L^{\text{wmin}}$, то новая ось L_0' получается из L^{wmin} при помощи раздутий ребер. Отсюда следует, что

$$\Sigma(L_0') \geq \#L_0' - 1, \quad (6.2)$$

так как

$$\Sigma(L^{\text{wmin}}) = \begin{cases} 3, & \text{если } L^{\text{wmin}} = G_3'(1, 1, b), \\ 4, & \text{если } L^{\text{wmin}} = G_1''(1, b; 2) \end{cases}$$

и $\Sigma(\Gamma)$ строго возрастает при каждом раздутии ребра. На следующих шагах, при получении L из L_0' , из вершин L_0' раздуваются цепи 1-го рода. Пусть эти цепи возникают из вершины $v' \in L_0'$. Очевидно, $\Sigma(\Gamma)$ не увеличивается лишь при первом раздутии вершины v' , причем если только v' была вершиной 1-го рода. Это и (6.2) показывают, что

$$\Sigma(L) \geq \#L - \#(L_0')^1 - 1. \quad (6.3)$$

В графе L_0' вершины 1-го рода очевидно не могут соединяться ребром (так как они образуют параболический подграф в L_0'), откуда, учитывая, что L_0' имеет три конца, получаем неравенства

$$\#(L_0')^1 \leq (\#L_0' + 1)/2 \leq (1/2)\Sigma(L_0') + 1 \leq (1/2)\Sigma(L) + 1,$$

где мы воспользовались кроме того (6.2). В результате из (6.3) получаем, что

$$\#L \leq (3/2)\Sigma(L) + 2. \quad (6.4)$$

Из (4.15) и (4.16) следует, что $\Sigma(L) \leq 2/\epsilon$, если $L^{\text{wmin}} = G_1''(1, b; 2)$, $b = 1, 2, 3$, или $L^{\text{wmin}} = G_3'(1, 1, b)$, $b > 1$. Отсюда и из (6.4) получаем, что в этих случаях $\#L \leq 3/\epsilon + 2$. Рассмотрим оценку $\text{diam } L$. Очевидно, $\text{diam } L \leq \#L_0' + t_1 + t_2 - 2$, где t_1 и t_2 - количество вершин цепей 1-го рода, выходящих из двух вершин v_1' и v_2' оси L_0' . В этом случае предыдущее рассуждение показывает, что

$$\Sigma(L) \geq \#L_0' + t_1 + t_2 - 3.$$

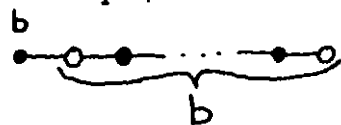
Откуда $\text{diam } L \leq \Sigma(L) + 1 \leq 2/\epsilon + 1$, если $L^{\text{wmin}} = G_1''(1, b; 2)$, $b = 1, 2, 3$, или $L^{\text{wmin}} = G_3'(1, 1, b)$, $b > 1$.

Случай $L^{\text{wmin}} = G_3'(1, 1, 1)$ требует отдельного разбора. В этом случае рассмотрим цикл $\bar{C} = v_1 + v_2 + v_3 + 2e$, где v_j - вершины веса 2, а e - веса 1 для $G_3'(1, 1, 1)$. В этом случае $r_a(C) =$

1, и неравенство в лемме 4.4.30 дает: $\sum a_i \eta(e_i, L^{\geq 2}) \leq 2$. Далее точно так же, как выше, доказывается, что $\Sigma(L_0') \geq \#L_0' - 2$, $\Sigma(L) \geq \#L - \#(L_0')^1 - 2$, $\#(L_0')^1 \leq (1/2)\Sigma(L) + 3/2$, $\#L \leq 3/\epsilon + 7/2$, $\text{diam } L \leq 2/\epsilon + 2$.

Рассмотрим, наконец, наиболее сложный случай, когда $L^{\min} = G_2(1, 1, b)$. В этом случае вид редуцированной оси L_0'' приведен в таблице 8 теоремы 4.4.29. Из этой таблицы видно, что существует стягивание $L_0'' \rightarrow L_0'''$ конца L_0'' из вершин весов $(1, 2, \dots, 2)$, состоящего из не более чем 6-ти вершин, причем это стягивание обратное последовательности раздутий вершин; граф L_0''' является целью и по теореме 4.4.29 получается последовательностью раздутий ребер некоторого графа $G_2(1, 1, b) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Беря $\bar{C} = v_1 + v_2 + v_3$, в случаях а), б) и с) таблицы 8 отсюда получаем оценку $\Sigma(L_0'') \geq \#L_0'' - 3$. В случаях е) - ф) таблицы 8, явно вычисляя $\Sigma(L_0'')$, получаем оценку $\Sigma(L_0'') \geq \#L_0'' - 7$. Далее точно так же, как в предыдущем случае, пользуясь тем, что новая ось L_0' получается из L_0'' раздутиями ребер, получаем оценки: $\#L \leq (3/2)\Sigma(L) + 11$, $\text{diam } L \leq \Sigma(L) + 9$. В силу (4.17) $\Sigma(L) \leq 3/\epsilon$. Откуда получаем требуемые неравенства: $\#L \leq 9/2\epsilon + 11$, $\text{diam } L \leq 3/\epsilon + 9$. ►

Замечание 4.6.3. В работе В.А.Алексеева [2] была получена оценка: $\#L \leq 16/\epsilon + 7$. Наши оценки в лемме 4.6.2 существенно лучше благодаря тому, что мы пользуемся явным видом L , полученным в 4.4^o (в особенности в теоремах 4.4.26 и 4.4.29). Кроме того, наше доказательство леммы 4.6.2. во многом отличается от данного В.А.Алексеевым. Для дельпеццовского лог-терминального графа



имеем:

$$\epsilon(L) = \min_{e \in L^1} \eta(e, L^{\geq 2}) = 2/b,$$

$$\text{diam } L = b + 1 = 2/\epsilon(L) + 1.$$

Это показывает, что оценки $\#L$ и $\text{diam } L$ леммы 4.6.2 близки к наилучшим возможным. Было бы все же интересно выяснить, каковы точные оценки. ►

Лемма 4.6.4. Пусть E - связная эллиптическая дельпеццовская лог-терминальная система векторов, для которой

$$\eta(e, E^{\geq 2}) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall e \in E^1.$$

Тогда

$$\#\{ \{v_1, v_2\} \subset E \mid \rho(v_1, v_2) \leq d \} \leq d(\#E) + 2/\varepsilon + 1;$$

если $e \in E^1$, то

$$\#\{ \{v_1, v_2\} \subset E - \{e\} \mid \rho_e(v_1, v_2) \leq d \} \leq d(\#E - 1) + 2/\varepsilon + 1.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Пусть $v \in E$ и T - подграф E , состоящий из вершин E , отстоящих от v на расстоянии не больше d . Достаточно доказать, что

$$\#T \leq 2d + 4/\varepsilon + 2. \quad (6.5)$$

По предложению 4.4.4 граф T - также связный эллиптический дельцецовский лог-терминальный, и он также удовлетворяет условию леммы 4.6.4. Воспользуемся теоремами 4.4.26, 4.4.29 и неравенством (4.12). Пусть T_0'' - редуцированная ось T . Из таблицы 6 теоремы 4.4.29 видно, что

$$\#T_0'' \leq 2 + 2d, \quad (6.6)$$

так как один из концов графов таблицы 6 имеет длину не больше двух. Пусть \bar{C} - фундаментальный цикл T_0'' и $\Sigma(\Gamma)$ - соответствующие \bar{C} суммы кратностей промежуточных графов $\Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow T_0''$. Новая ось T_0' получается из T_0'' раздутиями ребер. Поэтому

$$\Sigma(T) \geq \Sigma(T_0') \geq \#T_0' - \#T_0''. \quad (6.7)$$

Очевидно, $\#(T_0')^1 \leq \Sigma(T_0')$. Откуда (при раздутии целей 1-го рода) получаем, что

$$\Sigma(T) \geq \#T - \#T_0'' - \#(T_0')^1.$$

Отсюда и из (6.7) получаем, что

$$\#T \leq 2\Sigma(T) + \#T_0''.$$

В силу (4.12) имеем: $\Sigma(T) \leq 2/\varepsilon$. Отсюда и из (6.7) следует (6.5).

Рассмотрим вторую оценку леммы 4.6.4. Пусть E' получается стягиванием e . Очевидно, вторая оценка эквивалентна 1-й

оценке, но для E' . Она доказывается точно так же, как предыдущая. ►

Замечание 4.6.5. В работе В.А.Алексеева [2] лемма 4.6.4 доказывается с худшими оценками. Как и в лемме 4.6.2, наши оценки лучше, так как мы пользуемся явным видом E , полученным в 4.4°. ►

Докажем теорему 4.6.1. Пусть $\epsilon = \epsilon(Z)$. Из леммы 4.6.2 следует, что условие а) теорем 3.4 и 3.5 выполняется с $d = 3/\epsilon + 9$. Из леммы 4.6.4 следует, что теоремы 3.4 и 3.5 будут иметь место с константами

$$C_1 \leq 3/\epsilon + 8 + (2/\epsilon + 1)/n \leq 4/\epsilon + 9,$$

где $n = \#E$ (очевидно, можно считать, что $n \geq 2$), и

$$C_2 \leq 6/\epsilon + 17 + (2/\epsilon + 1)/n - 4/\epsilon - 9 \leq (7/\epsilon + 18) - 4/\epsilon - 9 = 3/\epsilon + 9.$$

Отсюда и теорем 3.4 и 3.5 получаем требуемое. ►

Из теоремы 4.6.1 и неравенства (5.2) вытекают следующие теоремы.

Теорема 4.6.6. Пусть Z - почти поверхность дель Пеццо с лог-терминальными особенностями над произвольным алгебраически замкнутым полем, $\sigma : Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z и $k(Z)$ - индекс Z .

Тогда

$$\rho(Y) < \begin{cases} 96(5k(Z) + 12) + 69, & \text{если } K_Z^2 > 0; \\ 96(5k(Z) + 12) + 70, & \text{если } K_Z^2 = 0 \text{ и } K_Z \neq 0. \end{cases}$$

Замечание 4.6.7. Для поверхностей дель Пеццо над \mathbb{C} теорема 4.6.6 с оценкой $\rho(Y) < Ak(Z)^{7/2}$, где A - абсолютная константа, ранее была получена автором в [11] и [12]. ►

Теорема 4.6.8. Пусть Z - почти поверхность дель Пеццо с лог-терминальными особенностями над произвольным алгебраически замкнутым полем, $\sigma : Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z и $r(Z)$ - дробный индекс Z .

Тогда

$$\rho(Y) < \begin{cases} 96(5/r(Z) + 12) + 69, & \text{если } K_Z^2 > 0, \\ 96(5/r(Z) + 12) + 70, & \text{если } K_Z^2 = 0 \text{ и } K_Z \neq 0. \end{cases}$$

Замечание 4.6.8'. Для поверхностей дель Пеццо над \mathbb{C} с худшими, чем у нас, константами теорема 4.6.8 была ранее доказана В.А.Алексеевым в [2]. ►

Следующая важная теорема вытекает из теоремы 4.6.8 и описывает множество дробных индексов почти поверхностей дель

Пеццо. Для поверхностей дель Пеццо над \mathbb{C} она была получена В.А.Алексеевым в [2].

Теорема 4.6.9. Множество R всех дробных индексов почти поверхностей дель Пеццо с лог-терминальными особенностями над произвольным алгебраически замкнутым полем лежит на полуинтервале $(0, 3]$, множество точек накопления R - это в точности множество $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, всякая возрастающая последовательность дробных индексов из R конечна.

Доказательство проводится точно так же, как в работе В.А.Алексеева [2]. Требуют изменения лишь два момента, которые мы здесь приведем.

Рациональность Y для минимального разрешения особенностей $\sigma: Y \rightarrow Z$ следует из предложения 4.2.1.

Пусть $\rho(Y) < N$, где N - некоторая константа, и для каждой компоненты $F_i \in \text{Exc}(Y)^3$ исключительного дивизора разрешения σ имеем: $-F_i^2 < b$, где b - некоторая константа. Покажем, что множество дробных индексов таких поверхностей Z конечно. Из указанных ограничений очевидно вытекает, что число возможных матриц Грама $\Gamma(\text{Exc}(Y)^3)$ конечно. Индекс $k(Z)$ поверхности Z определяется этой матрицей Грама, поэтому число таких индексов также конечно. Из формулы $K_Y = \sigma^*K_Z + \sum \alpha_i F_i$ получаем, что $k(Z)\sigma^*K_Z \in NS(Y)$, откуда $-\sigma^*K_Z = h/k(Z)$, $h \in NS(Y)$. В силу рациональности Y можно считать, что $\rho(Y) \geq 3$. В этом случае существует исключительная кривая E 1-го рода на Y , для которой получаем $-1 = E \cdot \sigma^*K_Z + \sum \alpha_i (E \cdot F_i)$, причем $E \cdot \sigma^*K_Z < 0$, $\alpha_i \leq 0$, $(E \cdot F_i) \geq 0$. Отсюда следует, что $0 < E \cdot h \leq k(Z)$, где $E \cdot h \in \mathbb{N}$. Поэтому $h = th'$, где $h' \in NS(Y)$ - примитивный элемент $NS(Y)$, $t \in \mathbb{N}$ и $t \leq k(Z)$. Отсюда получаем, что $\tau = t/k(Z)$, где натуральные $t \leq k(Z)$ ограничены. ►

Рассмотрим теперь другую оценку на $\rho(Y)$ - когда ограничены кратности особенностей Z . Пусть

$$e(Z) = \max_{z \in \text{Sing } Z} e(z),$$

где $e(z)$ - кратность особенности z (см. 4.1^o). Для лог-терминальных особенностей всегда $e(z) \leq 2k(z)$ (см. [11, лемма 1.1]). Поэтому при ограниченном индексе особенности ее кратность тоже ограничена, однако обратное не верно (см., например, [11, лемма 1.1]): при фиксированной кратности особенности ее индекс может быть сколь угодно велик. Поэтому оценку $\rho(Y)$ через $e(Z)$ можно рассматривать как другое (отличное от теоремы 4.6.1) обобщение оценки $\rho(Y)$ через $k(Z)$,

первоначально полученной автором. Отметим, что при ограничении на особенности: все показатели $\alpha_i \leq -1/2$, если $\alpha_i \neq 0$, эта оценка была получена автором в [11], оценка $\rho(Y)$ через $e(Z)$ для поверхностей дель Пеццо публикуется в [13].

Теорема 4.6.10. Пусть Z - почти поверхность дель Пеццо с лог-терминальными особенностями, $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z и $e=e(Z)$.

Тогда для $K_Z^2 \neq 0$

$$\rho(Y) < \begin{cases} 3141, \text{ если } e = 2, \\ 5317, \text{ если } e = 3, \\ 17735, \text{ если } e = 4, \\ 192e(e-3)(6e-27) \\ \hline \epsilon(e) \end{cases} + 1536e^2(e-3) + 69, \text{ если } e \geq 5,$$

для $K_Z^2 = 0$

$$\rho(Y) < \begin{cases} 3142, \text{ если } e = 2, \\ 5318, \text{ если } e = 3, \\ 17736, \text{ если } e = 4, \\ 192e(e-3)(6e-27) \\ \hline \epsilon(e) \end{cases} + 1536e^2(e-3) + 70, \text{ если } e \geq 5,$$

где функция $\epsilon(e)$ определена в замечании 4.6.13.

Доказательство.

Для лог-терминальной системы векторов V введем понятие кратности $e(V)$. Кратность $e(V)$ равна максимальной кратности связной эллиптической подсистемы $V' \subset V \geq 2$ (из векторов 2-го рода). Кратность $e(V')$ связной эллиптической лог-терминальной системы из векторов 2-го рода (т.е. минимальной) равна (как и для особенностей)

$$e(V') = 2 + \sum_{v \in V'} (-v^2 - 2).$$

Очевидно, кратность подсистемы всегда не больше, чем кратность системы.

Лемма 4.6.11. Пусть L - ланнеровская дельпецовская лог-терминальная система векторов и $e = e(L)$.

Тогда

$$\#L \leq \begin{cases} 10, & \text{если } e = 2, \\ 11, & \text{если } e = 3, \\ 25, & \text{если } e = 4, \\ \frac{(6e-27)(e-3)}{\varepsilon(e)} + 8e(e-3) + 1, & \text{если } e \geq 5, \end{cases}$$

где функция $\varepsilon(e)$ определяется в замечании 4.6.13.

Доказательство. Мы рассмотрим наиболее трудный случай, когда L удовлетворяет условию теоремы 4.4.26 (остальные случаи разбираются проще, при их рассмотрении отсутствуют некоторые моменты доказательства; ср. доказательство леммы 4.6.2).

По теореме 4.4.26 ось L_0 имеет не более трех концов. Пусть N - число вершин 1-го рода, лежащих на оси L_0 . Они разбивают ось L_0 на $N+1$ компоненту связности $L_i^{\geq 2}$, $i = 1, 2, \dots, N+1$, подграфа $L^{\geq 2}$. Пусть компонента $L_i^{\geq 2}$ имеет вершины v_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$ веса b_{ij} . Так как $e(L) = e$, то

$$\sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij} - 2) \leq e - 2, \quad (6.8)$$

откуда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij} - 2) \leq (N+1)(e-2). \quad (6.9)$$

Рассмотрим новую ось L_0' , полученную стягиванием цепей 1-го рода на L_0 . Пусть

$$\Sigma(L_0') = \sum_k (b_k' - 2),$$

где k нумерует все вершины L_0' , b_k' - их веса (так же определяется $\Sigma(\Gamma)$ и для других Γ). Очевидно,

$$\Sigma(L_0') = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij} - k_{ij} - 2) - N, \quad (6.10)$$

где k_{ij} - общее число вершин цепей 1-го рода, выходящих из вершины v_{ij} . По теореме 4.4.29 новая ось L_0' получается раздутиями ребер из редуцированной оси L_0'' . Отсюда следует, что

$$\Sigma(L_0') = \#L_0' - \#L_0'' + \Sigma(L_0'').$$

Если $L^{\text{wmin}} = G_3'(1, 1, b)$ или $G_1''(1, b; 2)$, то $L_0'' = G_3'(1, 1, b)$ или $G_1''(1, b; 2)$ соответственно по теореме 4.4.29. Откуда, $\Sigma(L_0'') - \#L_0'' = b - 6$, если $L_0'' = G_3'(1, 1, b)$ (где $b \geq 1$); $\Sigma(L_0'') - \#L_0'' = b - 4$, если $L_0'' = G_1''(1, b; 2)$ (где $b = 2, 3, 4$). Итак, в этих случаях $\Sigma(L_0') \geq \#L_0' - 5$. Пусть $L^{\text{wmin}} = G_2(1, 1, b)$, $b \geq 1$. В этом случае, пользуясь теоремой 4.4.29, получаем для случаев а) - 1) таблицы 8 соответственно, что $\Sigma(L_0'') - \#L_0''$ равно а) $b-6$, б) $b-7$, в) $b-7$, г) -7 , е) -7 , ф) -8 , г) $b-11$, ж) -7 , з) -8 , и) -7 , к) -7 , л) -10 . Таким образом, в этих случаях $\Sigma(L_0') \geq \#L_0' - 10$. И окончательно, для всех L , удовлетворяющих теореме 4.4.26, имеем

$$\Sigma(L_0') \geq \#L_0' - 10. \quad (6.11)$$

Учитывая, что $\#L = \#L_0' + \sum_{i,j} k_{ij}$, из (6.10) и (6.11) получаем:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij} - 2) \geq \#L_0' + \sum k_{ij} + N - 10 = \#L + N - 10.$$

Откуда, учитывая, что $\sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij} - 2) \leq e-2$, получаем оценку

$$\#L \leq (N+1)(e-3) + 11. \quad (6.12)$$

Отсюда получаем, что $\#L \leq 10$, если $e=2$, и $\#L \leq 11$, если $e=3$. Пусть $e=4$. Тогда из (6.12) следует, что $\#L \leq N+12$, откуда $\#L^{\geq 2} \leq 12$. В графе L при $\#L \geq 4$ две вершины 1-го рода не могут соединяться ребром, так как тогда они образуют параболический подграф, а L - ланнеровский. Отсюда следует, что $N \leq \#L^{\geq 2} + 1 \leq 13$ и $\#L \leq 25$. Заметим, что пока, при $e \leq 4$, мы не пользовались дельпецовостью системы L . Пользуясь теоремой 4.4.15, предложениями 4.4.18 и 4.4.19, для лог-терминальных L точно так же разбираются другие случаи L^{wmin} . В результате получаем

Предложение 4.6.12. Для всякого ланнеровского лог-терминального графа L кратности $e(L) \leq 4$ имеем:

$$\#L \leq \begin{cases} 10, & \text{если } e(L) = 2, \\ 11, & \text{если } e(L) = 3, \\ 25, & \text{если } e(L) = 4. \end{cases}$$

Пусть теперь $e \geq 5$. Положим $l = \#L$. Заметим, что общее число вершин компонент $L_i^{\geq 2}$, $i=1, \dots, N+1$, вместе с отходящими от компонент $L_i^{\geq 2}$ цепями 1-го рода равно $l - N$. Пусть v - вершина 1-го рода, лежащая на оси L_0 , пусть v соединяет соседние компоненты $L_i^{\geq 2}$, $L_{i+1}^{\geq 2}$, на оси L_0 (т.е. из вершины v выходят два ребра, одно - в вершину из $L_i^{\geq 2}$, другое - $L_{i+1}^{\geq 2}$) и $s(v)$ - общее число вершин компонент $L_i^{\geq 2}$ и $L_{i+1}^{\geq 2}$ и отходящих от них цепей 1-го рода. Пусть

$$Q = \sum_v s(v),$$

где v пробегает все множество I вершин 1-го рода на оси L_0 , которые соединяют компоненты $L_i^{\geq 2}$, $L_{i+1}^{\geq 2}$, имеющие линейный (т.е. формы A_n) граф. Так как L_0 имеет не более трех концов, то общее число таких вершин v не меньше $N - 3$. Очевидно, $Q \leq 2(l - N)$, и из (6.12) получаем, что

$$Q \leq (N + 1)(2e - 8) + 24. \quad (6.13)$$

Пусть $I_1 \subset I$ - подмножество тех вершин 1-го рода $v \in I$, для которых общее число вершин соединяемых v компонент $L_i^{\geq 2}$, $L_{i+1}^{\geq 2}$ вместе с отходящими от них цепями 1-го рода не больше $2e - 8$. Тогда для $\#I - \#I_1 \geq N - 3 - \#I_1$ вершин $v \in I - I_1$ это число не меньше $2e - 7$, и из (6.13) получаем:

$$2(\#I_1) + (N - 3 - \#I_1)(2e - 7) \leq (N + 1)(2e - 8) + 28.$$

Откуда

$$\#I_1 \geq \frac{N - 8e + 1}{2e - 9}. \quad (6.14)$$

Для вершины 1-го рода $v \in I_1$ общее число вершин соединяемых ею компонент $L_i^{\geq 2}$ и $L_{i+1}^{\geq 2}$ не больше $2e - 8$, сумма весов вершин этих компонент не больше $2(e-2) + 2(2e-8) = 6e - 20$. Отсюда следует, что число возможностей для графов $L_i^{\geq 2}$ и $L_{i+1}^{\geq 2}$ конечно, и число

$$\eta(v, L^{\geq 2}) = 1 + v \cdot (K(L_i^{\geq 2}) + K(L_{i+1}^{\geq 2})) > 0$$

ограничено снизу некоторой константой $\epsilon(e)$, зависящей только от e :

$$\eta(v, L^{\geq 2}) \geq \epsilon(e) > 0 \text{ для } v \in I_1.$$

Из неравенства (4.17) получаем, что $\epsilon(e)(\#I_1) \leq 3$. Отсюда и (6.14) получаем, что $N \leq (6e - 27)/\epsilon(e) + 8e - 1$, и из (6.12) следует, что

$$\#L \leq \frac{(6e-27)(e-3)}{\varepsilon(e)} + 8e(e-3) + 1. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. 4.6.13. Из доказательства следует, что в формулировке леммы 4.6.11 в качестве $\varepsilon(e)$ следует взять следующую функцию: Для $e \geq 5$

$$\varepsilon(e) = \min \{1 + \alpha_1 + \beta_1\},$$

L, M

где L, M, пробегает пары линейных лог-терминальных графов, образующих цепи вершин

$$L = (v_1, \dots, v_n), \quad M = (w_1, \dots, w_m),$$

причем выполнены условия:

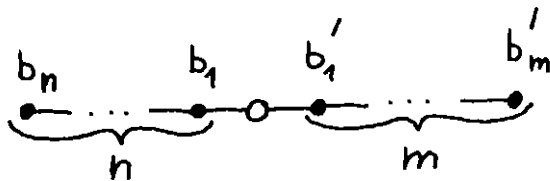
$$n + m \leq 2e - 8;$$

$$e(L) = 2 + \sum_{i=1}^n (b_i - 2) \leq e,$$

$$e(M) = 2 + \sum_{j=1}^m (b_j' - 2) \leq e,$$

где b_i - вес v_i , b_j' - вес w_j , все $b_i \geq 2$, $b_j' \geq 2$; для $K(L) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ и $K(M) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$ имеем:

$$1 + \alpha_1 + \beta_1 > 0.$$



(Данная диаграмма комментирует это определение.)

Лемма 4.6.14. Пусть E - связная эллиптическая лог-терминальная система векторов.

Тогда

$$\#\{\{v_1, v_2\} \subset E \mid \rho(v_1, v_2) \leq d\} \leq (3/2)de(E)(\#E);$$

для $v \in E^1$

$$\#\{\{v_1, v_2\} \subset E - \{v\} \mid \rho_v(v_1, v_2) \leq d\} \leq (3/2)de(E)(\#E - 1).$$

Доказательство. Сразу вытекает из теоремы 4.4.26 и того, что по теореме 4.4.26 ось E_0 имеет не более трех концов, вес вершины w оси E_0 не больше e , а число вершин цепей 1-го рода, выходящих из w , не больше $b - 1$, где b - вес w . ►

Доказательство теоремы 4.6.10 теперь вытекает из лемм 4.6.11, 4.6.14 и теорем 3.4 и 3.5. Эти теоремы будут иметь место с константами

$$d = \begin{cases} 9, & \text{если } e = 2, \\ 10, & \text{если } e = 3, \\ 24, & \text{если } e = 4, \\ \frac{(6e-27)(e-3)}{\varepsilon(e)} + 8e(e-3), & \text{если } e \geq 5, \end{cases}$$

и константами

$$C_1 = C_2 = \begin{cases} 24, & \text{если } e = 2, \\ 41, & \text{если } e = 3, \\ 138, & \text{если } e = 4, \\ \frac{3e(6e-27)(e-3)}{2\varepsilon(e)} + 12e^2(e-3), & \text{если } e \geq 5. \end{cases} \blacktriangleright$$

При доказательстве теоремы 4.6.10 при $e \leq 4$ мы не пользовались дельцепцовостью, и из предложения 4.6.12 и леммы 4.6.14 получаем следующую теорему.

Теорема 4.6.15. Пусть X - неособая алгебраическая поверхность над произвольным алгебраически замкнутым полем, множество исключительных кривых $E_{\text{ex}}(X)$ которой лог-терминально и кратность $e = e(E_{\text{ex}}(X)) \leq 4$.

Тогда

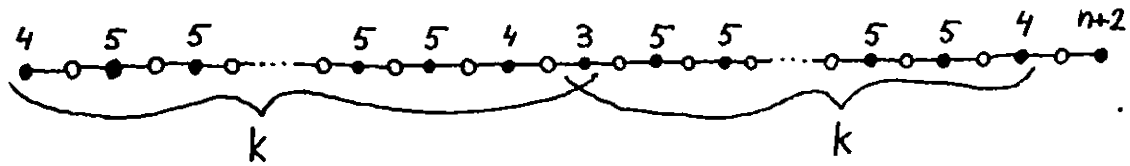
$$\rho(X) < \begin{cases} 3141 & \text{для } e = 2, \\ 5317 & \text{для } e = 3, \\ 17735 & \text{для } e = 4, \end{cases}$$

если многогранник $M(Y)$ эллиптичен (эквивалентно, многогранник Мори $\overline{NE}(Y)$ порожден $E_{\text{ex}}(Y)$), и

$$\rho(X) < \begin{cases} 3142 & \text{для } e = 2, \\ 5318 & \text{для } e = 3, \\ 17736 & \text{для } e = 4, \end{cases}$$

если $M(X)$ параболичен.

Замечание 4.6.16. Для $e \geq 5$ теорема 4.6.15 не верна. Из поверхностей $F_n, n \geq 0$, раздутиями точек пересечения исключительных кривых строится рациональная поверхность X с $\rho(X) = 2k + 1$ и со следующим множеством из $2k + 1$ исключительных кривых ($M(X)$ является симплексом):

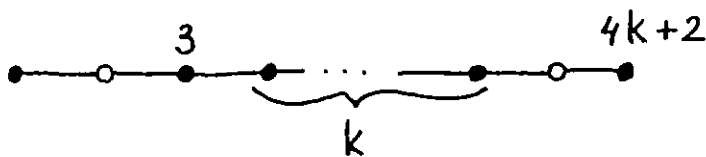


При этом k сколь угодно велико. Это показывает, что так же как особенности кратности 2 (т.е. дувалевские), особенности кратности 3 и 4 выделяются среди класса всех лог-терминальных особенностей поверхностей.

4.7⁰. Поверхности с nef антиканоническим классом и лог-терминальными особенностями. Здесь мы хотим, по-возможности, перенести результаты пункта 4.6⁰ на алгебраические поверхности Z с nef антиканоническим классом и лог-терминальными особенностями.

Следующий пример показывает, что теорема 4.6.1 не переносится на случай, когда $-K_Z$ является nef.

Пример 4.7.1. Из поверхностей F_n раздутиями точек пересечения исключительных кривых строится поверхность Y , для которой $\rho(Y) = k+4$, поверхность Y содержит $\rho(Y) = k+4$ исключительных кривых, образующих почти дельпецовский ланнеровский лог-терминальный граф вида



Для исключительной кривой 1-го рода E_1 , отвечающей левой вершине 1-го рода этого графа, $\eta(E_1, \text{Exc}(Y)^{\geq 2}) > 1/2$, а для исключительной кривой E_2 , отвечающей правой вершине 1-го рода, $\eta(E_2, \text{Exc}(Y)^{\geq 2}) = 0$. Поэтому для поверхности Z с лог-терминальными особенностями, полученной из поверхности Y стягиванием всех исключительных кривых 2-го рода, инвариант $\epsilon(Z) > 1/2$, антиканонический класс $-K_Z$ - nef (и даже $K_Z^2 > 0$), однако $\rho(Y) = k + 4$ может быть сколь угодно велико, так как можно взять любое $k \geq 1$. ►

Однако, теорема 4.6.6 переносится на случай, когда $-K_Z$ является nef.

Пусть (Z, z) - лог-терминальная особенность, $\sigma: Y \rightarrow Z$ - ее минимальное разрешение и

$$K_Y = \sigma^*K_Z + \sum \alpha_i F_i,$$

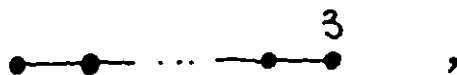
где F_i - компоненты исключительного дивизора разрешения и α_i - их показатели. Так как особенность (Z, z) лог-терминальна, то можно ввести инвариант

$$\beta(z) = \min_i \{ 1 + \alpha_i \} > 0.$$

Этот инвариант связан с индексом очевидным неравенством:

$$\beta(z) \geq 1/k(z).$$

Поэтому, если индекс $k(z)$ ограничен сверху k , то инвариант $\beta(z)$ ограничен снизу $1/k$. Однако обратное, как показывает пример особенности с графом



не верно. Для такой особенности (Z, z) индекс $k(z) = 2t + 1$, а инвариант

$$\beta(z) = (t + 1)/(2t + 1) > 1/2.$$

Если Z - поверхность с лог-терминальными особенностями, то положим

$$\beta(Z) = \min_{z \in \text{Sing } Z} \beta(z).$$

Очевидно, в глобальной формуле для минимального разрешения особенностей $\sigma: Y \rightarrow Z$

$$K_Y = \sigma^*K_Z + \sum_i \alpha_i F_i \quad (7.1)$$

имеем:

$$\beta(Z) = \min_i \{ 1 + \alpha_i \}$$

и, очевидно,

$$\beta(Z) \geq 1/k(Z).$$

Теорема 4.7.2. Пусть Z - алгебраическая поверхность с лог-терминальными особенностями и nef антиканоническим классом $-K_Z$. Пусть $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z и N - общее число компонент исключительного дивизора разрешения σ , происходящих из особых точек Z кратности ≥ 3 .

Тогда:

$$\rho(Y) < 128(3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 3) + 70, \text{ если } K_Z \neq 0;$$

$N < 128(3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 3) + 68$ и $\rho(Y) < 256(3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^3) + 3/\beta) + 78$, если $K_Z \equiv 0$, где $\varepsilon = \varepsilon(Z)$ и $\beta = \beta(Z)$.

Доказательство.

Лемма 4.7.3. Пусть L - почти дельпецовская лог-терминальная система векторов, причем для $\varepsilon > 0, \beta > 0$ имеем:

$$\eta(e, L^{\geq 2}) \geq \varepsilon > 0, \text{ если } e \in L^1 \text{ и } \eta(e, L^{\geq 2}) \neq 0,$$

$$K(L^{\geq 2}) = \sum \alpha_i f_i, \quad f_i \in L^{\geq 2}, \text{ причем } \alpha_i \geq -1 + \beta.$$

Тогда

$$\text{diam } L \leq (3/\varepsilon + 9)\Phi([1/\beta]) \leq (3/\varepsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 2),$$

где $\Phi(n) = \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n)$, ϕ - функция Эйлера.

Доказательство. Разобьем множество L^1 векторов 1-го рода из L на два класса:

$$L^1_+ = \{ e \in L^1 \mid \eta(e, L^{\geq 2}) > 0 \},$$

$$L^1_0 = \{ e \in L^1 \mid \eta(e, L^{\geq 2}) = 0 \},$$

Очевидно, $K(L^1_0 \cup L^{\geq 2}) = K(L^{\geq 2})$ в том смысле, что для всякого $v \in L^1_0 \cup L^{\geq 2}$ имеем: $v \cdot K(L^{\geq 2}) = -v^2 - 2$. Поэтому

$$K(L^1_0 \cup L^{\geq 2}) = \sum_{v_i \in L^1_0 \cup L^{\geq 2}} \alpha_i v_i, \quad (7.2)$$

где $\alpha_i = 0$, если $v_i \in L^1_0$, $\alpha_i \leq 0$, если $v_i \in L^{\geq 2}$. Таким образом, для любого $v_i \in L^1_0 \cup L^{\geq 2}$ имеем: $\alpha_i \leq 0$.

Заметим, что два вектора 1-го рода ланнеровской лог-терминальной системы, содержащей > 3 векторов, не соединяются ребром, так как в этом случае они образуют параболический подграф. Рассмотрим максимальную последовательность стягиваний $\tau: L \rightarrow \bar{L}$ векторов 1-го рода, происходящих из $L^1_0 \cup L^{\geq 2}$. При этом для $\tilde{L} = \tau(L^1_0 \cup L^{\geq 2}) \subset \bar{L}$ имеем:

$$K(\tilde{L}) = \tau_* K(L^1_0 \cup L^{\geq 2}) = \sum_{v_i \in L^1_0 \cup L^{\geq 2}} \tau_*(v_i), \quad (7.3)$$

где $\tau_*(v_i) = 0$, если v_i стягивается, $\tau_*(v_i) = \tau(v_i)$, если v_i не стягивается. Отождествляя вектора e и $\tau(e)$ из L^1_+ , получаем из (7.3), что

$$\eta(e, K(\tilde{L})) = \eta(e, K(L^{\geq 2})) > 0 \quad \forall e \in L^1_+.$$

Отсюда мы получаем следующие две возможности:

а) Все вектора из \tilde{L} 2-го рода; тогда \bar{L} - лог-терминальная система, для которой $L^1_+ = \bar{L}^1$, $\tilde{L} = \bar{L}^{\geq 2}$,

$$\eta(e, \bar{L}^{\geq 2}) \geq \epsilon > 0 \quad \forall e \in \bar{L}^1,$$

для $K(\bar{L}^{\geq 2}) = \sum \alpha_i \bar{v}_i$, где $\bar{v}_i \in \bar{L}^{\geq 2}$, верно, что $-1 < \alpha_i \leq 0$.

б) \tilde{L} содержит не пустое множество векторов 1-го рода; тогда ни один из векторов 1-го рода из \tilde{L} не допускает стягивания $\bar{L} \rightarrow \bar{L}'$; для $K(\tilde{L}) = \sum \alpha_i \bar{v}_i$, где $\bar{v}_i \in \tilde{L}$, верно, что $-1 < \alpha_i \leq 0$ для всех \bar{v}_i ; всякий вектор $e \in \bar{L} - \tilde{L}$ - это вектор 1-го рода, причем

$$\eta(e, \tilde{L}) = 1 + e.K(\tilde{L}) \geq \epsilon > 0.$$

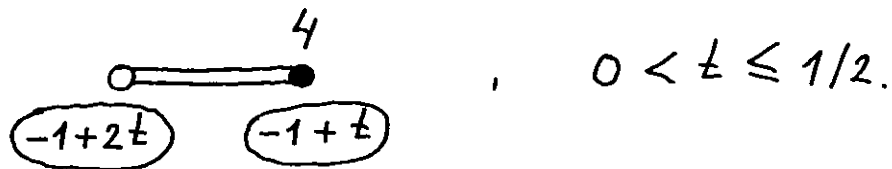
Рассмотрим более подробно каждую из этих возможностей.

Рассмотрим случай а), предполагая, что $\#L \geq 4$. Если $\bar{L}^{\geq 2}$ гиперболично, то $\bar{L} = \bar{L}^{\geq 2}$ минимален, и все такие \bar{L} описаны в теореме 4.4.15 в таблицах 3, а) и 3, б). Вычисляя для каждого такого \bar{L} класс $K(\bar{L}^{\geq 2})$, нетрудно убедиться, что $K(\bar{L}^{\geq 2})$ удовлетворяет условию а), если только $\bar{L}^{\geq 2}$ состоит из векторов веса 2. Это показывает, что система \bar{L} - дельпецовская. Если $\bar{L}^{\geq 2}$ параболично, то по теореме 4.4.13 $\bar{L}^{\geq 2}$ совпадает с \tilde{A}_n , \tilde{D}_n , \tilde{E}_n , и состоит из векторов веса 2. Отсюда следует, что \bar{L} - дельпецовская система. Если $\bar{L}^{\geq 2}$ эллиплично, то \bar{L} - очевидно дельпецовская система. Таким образом, в случае а) \bar{L} - дельпецовская система, которую мы назовем дельпецовской

моделью почти дельпецовской лог-терминальной системы (или графа) L .

Рассмотрим случай б), предполагая, что $\#L \geq 4$. Так как \bar{L} содержит вектор 1-го рода $v \in \tilde{L}$, не допускающий стягивания, то $\#\bar{L} \leq 3$, и по теореме 4.4.15 получаем, что \bar{L} - один из графов таблицы 3), б), либо \bar{L} получается из графов $G_1(1, 1; 3)$ или $G_1(1, b; 2)$ при помощи одного раздутия вершины 1-го рода. Проверив все эти случаи на условие б), получаем только те возможности для \bar{L} и L^1_+ , которые представлены в таблице 9 ниже. В этой таблице элементы L^1_+ обведены квадратиком, а для элементов из \tilde{L} в кружке указаны их показатели α_j в $K(\tilde{L})$. В этом случае мы также называем лог-терминальную систему \bar{L} с выделенным в ней подмножеством L^1_+ дельпецовской лог-терминальной моделью почти дельпецовской системы L (несмотря на то, что в большинстве случаев L не является дельпецовской).

Отметим (далее мы будем этим пользоваться), что дельпецовская модель точно так же определяется для почти дельпецовских параболических и эллиптических лог-терминальных систем. В параболическом случае возможности б) отвечает единственная система - система P_2 таблицы 2, изображенная ниже.



В эллиптическом случае возможен только случай а).

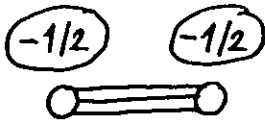
Для почти дельпецовской лог-терминальной системы L , удовлетворяющей условию леммы, рассмотрим ее дельпецовскую модель $\bar{L} = L^1_+ \cup \tilde{L}$. При этом, как мы видели,

$$K(\tilde{L}) = \sum \alpha_j \bar{v}_j, \quad \bar{v}_j \in \tilde{L}, \quad \text{где } 0 \geq \alpha_j \geq -1 + \beta,$$

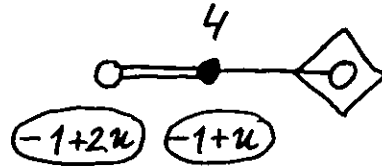
$$\eta(e, \tilde{L}) = 1 + e. K(\tilde{L}) \geq \epsilon, \quad e \in L^1_+.$$

По построению, L получается последовательностью раздутий полных подграфов, происходящих из \tilde{L} . Рассмотрим промежуточные системы

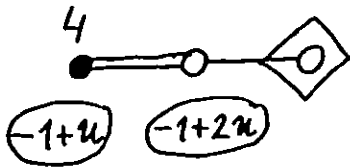
$$\begin{array}{c} \sigma \\ L \rightarrow \Gamma \rightarrow \bar{L} \\ \tau \end{array}$$



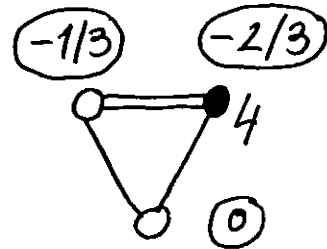
$$G_1(1, 1, 3),$$



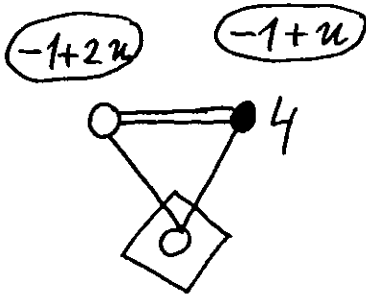
$$G_2(1, 4, 1), 0 < u < 1/2,$$



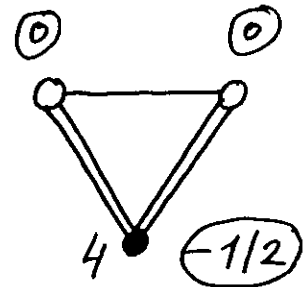
$$G_2(4, 1, 4), 0 < u < 1/2,$$



$$G_3(1, 4, 1)$$



$$\tilde{G}_3(1, 4, 1), 1/3 < u < 1/2,$$



$$G_5(1, 4, 1)$$

Таблица 9.

Будем отождествлять L^1_+ с образом в Γ . Пусть $\Gamma' = \Gamma - L^1_+$. Очевидно, $K(\Gamma') = \sigma_* K(L^1_0 \cup L^{\geq 2}) = \sum \beta_i w_i$, $w_i \in \Gamma'$, причем $0 \geq \beta_i \geq -1 + \beta > -1$. Будем называть β_i показателями w_i . В последовательности раздутий $\sigma : L \rightarrow \Gamma$ при одном раздутии σ_1 полного подграфа из Γ' показатель вершины $\sigma_1^{-1}(w_i)$ совпадает с показателем $w_i \in \Gamma'$, а показатель α возникающей при раздутии σ_1 вершины e 1-го рода равен $\alpha = 1 + \beta_1 + \dots + \beta_k$, если раздувается полный подграф из Γ' , состоящий из вершин w_1, \dots, w_k показателей β_1, \dots, β_k . Отсюда следует, что в Γ' не может раздуваться одна вершина w_i , так как тогда показатель e равен $1 + \beta_i > 0$. Если в Γ' раздувается ребро, состоящее из вершин w_i, w_j , то показатель α вершины e удовлетворяет условию

$$1 \geq \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}_i + \tilde{\beta}_j, \tag{7.4}$$

если $\tilde{a} = 1 + a$ для числа a . Если $\#\Gamma \geq 5$, то по следствию 4.4.16 полные подграфы Γ - это только вершины и ребра, поэтому, начиная с $\#\Gamma \geq 5$, раздуваются только ребра, лежащие в $\Gamma' = \Gamma - L^1_+$.

Приведенное рассуждение показывает, что

$$\text{diam } L \leq \gamma \text{ diam } \bar{L},$$

где $\gamma - 1$ оценивает количество вершин L , возникающих при последовательности раздутий τ на цепи между двумя вершинами $\tau^{-1}(\bar{v}_i), \tau^{-1}(\bar{v}_j)$, где вершины \bar{v}_i и \bar{v}_j соединятся в \tilde{L} ребром. При этом из (7.4) следует, что $\gamma \leq \Phi(N)$, $N \doteq [1/\beta]$, где $[\]$ - целая часть, а функция $\Phi(N)$, $N \in \mathbb{N}$, определяется следующим образом.

Рассмотрим последовательность чисел S_N , которая определяется рекуррентно. Для $N = 1$ эта последовательность состоит из чисел $(1, 1)$; для $N = 2$ - из чисел $(1, 2, 1)$ и т. д. Если эта последовательность определена для $N-1$, то для N она получается следующим образом: между каждой соседней парой чисел a_i и a_{i+1} последовательности S_{N-1} ставится число $b = a_i + a_{i+1}$, если $b \leq N$. Функция $\Phi(N)$ по определению равна $\#S_N - 1$.

Мы утверждаем, что

$$\Phi(N) = \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(N), \tag{7.5}$$

где ϕ - функция Эйлера. Нам понадобится только оценка

$$\Phi(N) \leq \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(N).$$

Это мы и докажем.

Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 последовательность \tilde{S}_N векторов (a, b) с целочисленными координатами, которая определяется рекуррентно. Последовательность $\tilde{S}_1 = ((1, 0), (0, 1))$, $\tilde{S}_2 = ((1, 0), (1, 1), (0, 1))$ и т. д. Если определена последовательность векторов \tilde{S}_{N-1} , то последовательность \tilde{S}_N получается следующим образом: между соседней парой векторов $(a, b), (c, d)$ ставится сумма этих векторов $(a+c, b+d)$, если сумма их координат $a+c+b+d \leq N$. Последовательность S_N получается из \tilde{S}_N взятием суммы координат каждого вектора. По построению, каждая пара соседних векторов последовательности \tilde{S}_N порождает фундаментальный параллелограмм (или базис) целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, поэтому всякий вектор $v \in \tilde{S}_N$ примитивен. По построению, все вектора последовательности \tilde{S}_N различны. Поэтому их число не превосходит числа примитивных векторов с целочисленными координатами (a, b) , для которых сумма координат $a+b \leq N$. Это же число равно $1+\phi(1)+\phi(2)+\dots+\phi(N)$, что доказывает требуемое. Известно:

$$\Phi(N) = (3/\pi^2)N^2 + O(N \ln N)$$

(см. [32]). Мы используем отсюда оценку: $\Phi(N) \leq (1/3)N^2 + 2$.

Из леммы 4.6.2 и таблицы 9 получаем оценку $\text{diam } \bar{L} \leq 3/\epsilon + 9$. Поэтому $\text{diam } L \leq (3/\epsilon + 9)\Phi([1/\beta])$, что доказывает требуемое. ►

Лемма 4.7.4. Пусть E - связная эллиптическая почти дельцецовская лог-терминальная система векторов, для которой

$$\eta(\epsilon, E^{\geq 2}) \geq \epsilon > 0, \text{ если } \epsilon \in E^1 \text{ и } \eta(\epsilon, E^{\geq 2}) \neq 0.$$

Тогда для всякого подмножества $Q \subset E$, состоящего из векторов с квадратом -1 и -2 имеем:

$$\#\{\{v_1, v_2\} \subset E - Q \mid \rho_Q(v_1, v_2) \leq d\} \leq d(\#E - \#Q) + 2/\epsilon + 1.$$

Доказательство. Проводится точно так же, как доказательство лемм 4.6.4 и 4.7.3. ►

Докажем теорему 4.7.2. Для $K_Z \neq 0$ доказательство сразу следует из теорем 3.4 и 3.5. Для $K_Z = 0$ теорема 3.6 дает, что $N = \#E_{\text{хс}}(Y)^3$ (см. определение 4.4.1), т.е. число компонент F_i , участвующих в формуле $K_Y = \sigma^*K_Z + \sum \alpha_i F_i$ с отрицательными коэффициентами α_i , оценивается неравенством $N < 128(3/\epsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 3) + 68$. С другой стороны, по формуле Нетера получаем, что

$$\begin{aligned} \rho(Y) &= 10 - K_Y^2 \leq 10 - (\sum \alpha_i F_i)^2 \leq 10 - \sum \alpha_i (F_i \cdot (\sum \alpha_j F_j)) = 10 + \sum (-F_i^2 - 2)(-\alpha_i) \leq \\ &\leq 10 + N \cdot \max \{-F_i^2 - 2\}, \end{aligned}$$

так как $\alpha_i > -1$. Из формулы для рода кривой на поверхности следует, что

$$-F_i^2 = \frac{2 + \sum \alpha_j}{1 + \alpha_i} \leq 2/\beta. \quad (7.6)$$

Здесь j пробегает те $j \neq i$, для которых $F_i \cdot F_j = 1$. Отсюда получаем, что

$$\rho(Y) \leq 10 + 2N/\beta < 256(3/\epsilon + 9)(1/(3\beta^2) + 3/\beta) + 78. \blacktriangleright$$

Теорема 4.7.5. Пусть Z - алгебраическая поверхность с лог-терминальными особенностями и nef антиканоническим классом $-K_Z$. Пусть $\sigma: Y \rightarrow Z$ - минимальное разрешение особенностей Z и N - общее число компонент исключительного дивизора разрешения σ , происходящих из особых точек кратности ≥ 3 , $k(Z)$ - индекс Z .

Тогда

$$\rho(Y) < 128(3k(Z) + 9)((1/3)k(Z)^2 + 3) + 70, \text{ если } K_Z \not\equiv 0;$$

$$\begin{aligned} N &< 128(3k(Z) + 9)((1/3)k(Z)^2 + 3) + 68 \\ \text{и } \rho(Y) &< 256(3k(Z) + 9)((1/3)k(Z)^3 + 3k(Z)) + 78, \\ \text{если } K_Z &\equiv 0. \end{aligned}$$

Доказательство вытекает из теоремы 4.7.2, поскольку $\epsilon(Z) \geq 1/k(Z)$, $\beta(Z) \geq 1/k(Z)$. \blacktriangleright

Отметим, что из теоремы 4.7.5 вытекает следующее важное следствие, полученное для поверхностей дель Пеццо над \mathbb{C} в [11] и [12].

Следствие 4.7.6. В предположениях и обозначениях теоремы 4.7.5 множество графов Грама $\Gamma(\text{Exc}(Y))$ конечно, если $K_Z^2 > 0$ и индекс $k(Z)$ фиксирован.

Доказательство. См. доказательство предложения 2.3 в [11]. \blacktriangleright

Литература

- [1] Алгебраические поверхности, Труды Матем. института им. Стеклова АН СССР 75 (1965).
- [2] Алексеев В.А., Дробные индексы лог-поверхностей дель Пецо, Изв. АН СССР. Сер. матем. 52 (1988), N 6.
- [3] Алексеев В.А., Никулин В.В., Классификация поверхностей дель Пецо с лог-терминальными особенностями индекса ≤ 2 , инволюции на поверхностях K3 и группы отражений в пространствах Лобачевского, Вопросы чистой и прикладной математики (доклады по математике и ее приложениям) 2 (1988), N 2.
- [4] Алексеев В.А., Никулин В.В., Классификация поверхностей дель Пецо с лог-терминальными особенностями индекса ≤ 2 и инволюции на поверхностях K3, Докл. АН СССР (1989), в печати.
- [5] Андреев Е.М., Пересечение гиперплоскостей граней многогранников с острыми углами, Мат заметки 8 (1970).
- [6] Винберг Э.Б., Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности, Труды Москов. Мат. Об-ва 47(1984).
- [7] Винберг Э.Б., Гиперболические группы отражений, Успехи мат. наук 40 (1985).
- [8] Илиев А.И., Лог-терминальные особенности алгебраических поверхностей, Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика 3 (1986).
- [9] Никулин В.В., О фактор-группах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями, Алгебро-геометрические приложения, Современные проблемы математики (ВИНИТИ) 18 (1981).
- [10] Никулин В.В., О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского, Изв. АН СССР. Сер. мат. 45 (1981).
- [11] Никулин В.В., Поверхности дель Пецо с лог-терминальными особенностями, Матем. сборник 180 (1989), N 2.
- [12] Никулин В.В., Поверхности дель Пецо с лог-терминальными особенностями. II, Изв. АН СССР. Сер. мат. 52 (1988), N 5.
- [13] Никулин В.В., Поверхности дель Пецо с лог терминальными особенностями. III, Изв. АН СССР. Сер. мат. 53 (1989), N 6.
- [14] Прохоров М.Н., Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником в пространстве Лобачевского большой размерности, Изв. АН СССР. Сер. мат. 50 (1986), N 2.

- [15] Хованский А.Г., Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространствах Лобачевского, Функц. анализ и его прилож. 20 (1986), N 1.
- [16] Шокуров В.В., Теорема о необращении в нуль, Изв. АН СССР. Сер. мат. 49 (1985), N 3.
- [17] Artin M., On isolated singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966).
- [18] Bombieri E., Husemoller D., Classification and embeddings of surfaces, Proc. Symp. Pure Math., AMS 29 (1975).
- [19] Bourbaki N., Groupes et algebras de Lie, Chaps. 4-6, Hermann, Paris, 1968.
- [20] Brieskorn E., Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Invent. math. 4 (1968).
- [21] Hartshorne R., Algebraic geometry, Springer, 1977.
- [22] Kawamata Y., The cone of the curves of algebraic varieties, Ann. Math. 119 (1984).
- [23] Mori Sh., Treefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Annals Math. 116 (1982).
- [24] Mori Sh., Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988).
- [25] Mumford D., The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, IHES 9 (1961).
- [26] Nikulin V.V., Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces, Proceed. Intern. Congress Math. Berkeley, California, 1986.
- [27] Raghunatan M.S., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972.
- [28] Sakai F., The structure of normal surfaces, Duke Math. J. 52 (1985).
- [29] Watanabe K., On plurigenera of normal isolated singularities. I., Math. Ann. 250 (1980).
- [30] Zariski O., On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Ill. J. Math. 2 (1958).
- [31] Zariski O., The theorem of Riemann-Roch for high multiples, Ann. Math. 76 (1962).
- [32] Chandrasekharan K., Introduction to analytic number theory, Springer, 1968.