Structure complexe non commutative et superconnexions

by
Paula Beazley Cohen

U.R.A. 747 au CNRS
Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75005 Paris

France

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Germany

MPI / 92-19

STRUCTURE COMPLEXE NON COMMUTATIVE ET SUPERCONNEXIONS.

PAULA BEAZLEY COHEN
U.R.A.747 au CNRS
Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75005 Paris
France

L'autrice remercie l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, où ces recherches ont été poursuivies pendant l'année universitaire 1985/86 et l'Institut-Max-Planck für Mathematik, où elles ont été rédigées pendant 1992, pour son acceuil. L'idée qu'un critère d'existence d'une structure complexe sur un fibré hilbertien pourrait se formuler en se servant des superconnexions, introduites par D. Quillen [Q], a été suggérée à l'autrice par A. Connes qui l'a aussi encouragée en 1986 de préparer ces notes. Au sens de l'autrice, la notion qui sera proposée dans cette prépublication est pertinente mais pas plus que prépubliable, le but y étant de présenter des idées peut-être utiles à une notion plus mure.

Le cas des courbes

Soit M une variété complexe de dimension 1 et $C_c^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions lisses à valeurs complexes et support compact sur M. Soit $T^*(M)$ le fibré cotangent complexifié de M. La structure complexe sur M induit sa décomposition $T^*(M)=T^*(M)^{1,0}\oplus T^*(M)^{0,1}$ en deux sous-espaces réels reliés par la conjugaison complexe: $\overline{T^*(M)^{1,0}}=T^*(M)^{0,1}$. Le module des 1-formes $\Omega^1(M)=C_c^\infty(M,T^*(M))$ est muni d'une décomposition $\Omega^1(M)=\Omega^{1,0}(M)\oplus\Omega^{0,1}(M)$ en formes de type (1,0) et (0,1) où $\overline{\Omega^{1,0}(M)}=\Omega^{0,1}(M)$, ce qui correspond à l'ecriture $d=\partial+\bar\partial$ de la différentielle de de-Rham en termes des opérateurs de Dolbeault sur M. On introduit un fibré hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué $E=E^+\oplus E^-$ sur M. On n'exclut pas la possibilité que les fibres soient de dimension infinie. En particulier, comme chaque fibre est un espace de Banach, on peut considérer le module $\Omega^0(M,E)$ des sections lisses à support compact sur M à valeurs dans E, qui porte une $\mathbb{Z}/2$-graduation

$\Omega^0(M,E)=\Omega^0(M,E^+)\oplus\Omega^0(M,E^-)$ associée à un automorphisme ε et une décomposition correspondante du produit scalaire $<\ ,\ >=<\ ,\ >_+ + <\ ,\ >_-$ sur $\Omega^0(M,E)$ à valeurs dans $C_c^\infty(M)$. L'application $\xi \mapsto |<\xi,\xi>|^{1/2}$ definie une norme et induit une structure d'espace de Banach sur $\Omega^0(M,E)$. On désigne par $\Omega^1(M,E)=C_c^\infty(M,E\otimes_{\mathbb{C}}T^*(M))$ les 1-formes lisses à valeurs dans E, et on remarque que le produit scalaire $<\ ,\ >$ peut être étendu de façon naturelle à $\Omega^1(M,E)\times\Omega^0(M,E)$ et à $\Omega^0(M,E)\times\Omega^1(M,E)$ où il prend ses valeurs dans $\Omega^1(M)$. Par une connexion ∇ sur $\Omega^0(M,E)$ compatible à la graduation, on entend une application linéaire sur $\mathbb{C}$, définie sur un ensemble dense $\mathrm{Dom}(\nabla)$ de $\Omega^0(M,E)$, et à valeurs dans $\Omega^1(M,E)$ satisfaisant pour tout $b\in C_c^\infty(M)$ et tout $\xi\in\mathrm{Dom}(\nabla)$ à,

$$\nabla(\xi b)=(\nabla\xi)b+\varepsilon(\xi)\otimes db.$$

Dans cette formule les éléments de $C_c^\infty(M)$ agissent à droite dans $\Omega^0(M,E)$ et $\Omega^1(M,E)$ et le produit tensoriel est pris sur $C_c^\infty(M)$, où on utilise son action à gauche dans $\Omega^1(M)$. Par rapport à la décomposition définie par ε on peut écrire ∇ de la forme,

$$\begin{bmatrix} \nabla_+ & 0 \\ 0 & \nabla_- \end{bmatrix}$$

Les connexions ∇_+ et ∇_- sont des connexions à graduation triviale sur $\Omega^0(M,E^+)$ et $\Omega^0(M,E^-)$ respectivement. Par une super-connexion (suivant [Q]) $\nabla(S)=\nabla+iL$ sur $\Omega^0(M,E)$ on entend la somme d'une connexion ∇ sur $\Omega^0(M,E)$ compatible à la graduation et un élément impair L de l'espace $\mathrm{Op}(E)$ des opérateurs $C_c^\infty(M)$-linéaires définis sur un ensemble dense de $\Omega^0(M,E)$. On a donc les lois de commutation $\nabla\varepsilon=\varepsilon\nabla$ et $L\varepsilon=-\varepsilon L$, où on entend l'extension évidente de ε à $\Omega^1(M,E)$. On remarque que chaque élément de $\mathrm{Op}(E)$ peut être étendu par $\Omega^1(M)$-linéarité d'agir sur $\Omega^1(M,E)$. On a une décomposition $\Omega^1(M,E)=\Omega^{1,0}(M,E)\oplus\Omega^{0,1}(M,E)$ induite par la structure complexe sur M et, de la même manière que pour d, une décomposition correspondante de ∇ en une composante de type $(1,0)$ et une composante de type $(0,1)$, que l'on écrit de la forme $\nabla=\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1}$. Les sous-ensembles suivants de $\mathrm{Op}(E)$ agissent sur

$\Omega^1(M,E)$,

$$Op^{1,0}(\nabla)=\{\mathcal{F}\in Op(E) \mid [\nabla^{0,1},\mathcal{F}]=0\}$$
$$Op^{0,1}(\nabla)=\{\mathcal{F}\in Op(E) \mid [\nabla^{1,0},\mathcal{F}]=0\},$$

où les commutateurs sont gradués. On écrit,

$$Op^1(\nabla) = Op^{1,0}(\nabla)+ Op^{0,1}(\nabla),$$

où en générale il ne s'agit pas d'une somme directe. De plus, on écrit $Op^{1,1}(\nabla)$ pour les éléments de $Op(E)$ qui sont des sommes de termes de la forme $\mathcal{F}_1\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2\mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_i \in Op^{1,0}(\nabla)$ et $\mathfrak{G}_i \in Op^{0,1}(\nabla)$, $i=1,2$. Pour $L\in Op(E)$, soit L^* l'endomorphisme de $\Omega^0(M,E)$ dont la valeur à $x\in M$ est l'adjoint L_x^* de L_x. On fabrique les espaces $\mathbb{R}$- vectoriels $Op^1(\nabla)^*$, engendré par les $F\in Op^1(\nabla)$ de la forme $F=\mathcal{F}+\mathcal{F}^*$, et $Op^{1,1}(\nabla)^*$ engendré par les éléments de $Op^{1,1}(\nabla)$ de la forme $\mathcal{F}\mathcal{F}^*+\mathcal{F}^*\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}\in Op^{1,0}(\nabla)$ et $\mathcal{F}^*\in Op^{0,1}(\nabla)$. Par construction les éléments de ces deux espaces sont des opérateurs auto-adjoints. On propose la définition suivante.

Définition:

Une superconnexion $\nabla =\nabla+iL$ sur $\Omega^0(M,E)=\Omega^0(M,E^+)\oplus\Omega^0(M,E^-)$ est holomorphe lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

(1) l'opérateur pair $\nabla =\nabla_+ + \nabla_-$ est compatible avec le produit scalaire, à savoir, pour tout $\alpha,\beta\in Dom(\nabla_\pm)$ dans $\Omega^0(M,E^\pm)$ on a

$$d<\alpha,\beta>_\pm=<\nabla\alpha, \beta>_\pm+<\alpha,\nabla\beta>_\pm,$$
$$= <\nabla_\pm\alpha, \beta>+<\alpha,\nabla_\pm\beta>.$$

(2) pour chaque $x\in M$, l'opérateur L_x est un opérateur impair, fermé, densément défini sur l'espace de hilbert E_x, tel que $(1+L_x^2)$ soit inversible en un opérateur compact.

(3) pour chaque $x\in M$, l'opérateur $[\nabla ,L]_x$ est un élément de $\mathcal{L}(E_x)\otimes_{\mathbb{C}}T_x^*(M)$ où $\mathcal{L}(E_x)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés sur E_x.

(4) on a $L\in Op^1(\nabla)^*$ et $L^2\in Op^{1,1}(\nabla)^*$.

Le cas des variétés complexes.

Soit M une variété complexe de dimension complexe n et $\mathfrak{B}=C_c^\infty(M)$ l'algèbre commutative des fonctions lisses à support compact sur M. Soit $T^*(M)$ le fibré cotangent complexifié de M et $\Lambda^r T^*(M)$ son r-ième produit extérieur, $r=1,\dots,2n$. La structure complexe sur M induit une décomposition des r-formes $\Omega^r(M)=C_c^\infty(M,\Lambda^r T^*(M))$ en formes de type (p,q), $p+q=r$, qui s'écrit de la forme $\Omega^r(M)=\oplus_{p+q=r}\Omega^{p,q}(M)$, $r=1,\dots,2n$. La conjugaison complexe induit la relation $\overline{\Omega^{p,q}(M)}=\Omega^{q,p}(M)$. Chaque $\Omega^{p,q}(M)$ porte la structure d'un $\mathfrak{B}$-bi-module. On introduit un fibré hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué $E=E^+\oplus E^-$ auquel on permet des fibres de dimension infinie, et le $\mathfrak{B}$-module à droite associé $\mathcal{E}=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$ de sections lisses à support compact, avec l'automorphisme ε qui définit la graduation. Pour la définition d'une fonction lisse à valeurs dans un espace de Banach voir par exemple [L]. Le produit scalaire hilbertien défini fibre par fibre sur E induit un produit scalaire $<,>=<,>_+ + <,>_-$ sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{B}$ qui satisfait à

(i) $<\alpha,\beta>(x) = <\alpha(x),\beta(x)>$, $x\in M$, $\alpha,\beta\in\mathcal{E}$,

(ii) $<\alpha,\beta>=\overline{<\beta,\alpha>}$, $\alpha,\beta\in\mathcal{E}$,

(iii) $<\alpha,\alpha>\geqslant 0$, $\alpha\in\mathcal{E}$,

(iv) $<\alpha,\beta b> = <\alpha,\beta>b$ $\alpha,\beta\in\mathcal{E}$, $b\in\mathfrak{B}$,

(v) $\mathcal{E}$ est un espace de Banach pour la norme $\alpha \mapsto |<\alpha,\alpha>|^{1/2}$.■■■

Ces conditions sur le couple $(\mathcal{E},\mathfrak{B})$ sont celles de la définition d'un C^*-module hilbertien.

On désigne par $\Omega(M,E)=\mathcal{E}\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(M)$ le $\Omega(M)$-module des formes différentielles sur M à valeurs dans E. Par rapport à la graduation induite par le degré, $\Omega(M)$ est une algèbre commutative $\mathbb{Z}/2$-graduée. Le module $\Omega(M,E)$ est $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}$-gradué par un automorphisme Θ et peut être vu comme un module $\mathbb{Z}/2$-gradué sur $\Omega(M)$ (pour un traitement de ces algèbres graduées, et en particulier de leur généralisation au cadre de la cohomologie cyclique, voir par exemple [C],[K]). Soit $Op(\mathcal{E})$ l'ensemble des opérateurs $\mathfrak{B}$-linéaires densément définis sur $\mathcal{E}$, qui se décompose en éléments pairs et impairs selon leur commutation ou non à ε. Soit

$Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(M)$ l'algèbre $\mathbb{Z}/2$-graduée des formes différentielles à valeurs dans $Op(\mathcal{E})$. On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'algèbre des opérateurs $\mathfrak{B}$-linéaires bornés sur $\mathcal{E}$, d'où la sous-algèbre $\mathbb{Z}/2$-graduée $\mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(M)$. Par un opérateur densément défini sur $\Omega(M,E)$ on entend un opérateur T défini sur $Dom_\circ T\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(M)$ où $Dom_\circ T$ est dense dans $\mathcal{E}$ et fermé sous l'action de $\mathfrak{B}$. On peut étendre le produit scalaire $<,>$ sur $\mathcal{E}$ à $\Omega(M,E)$ où il prend ses valeurs dans $\Omega(M)$.

Définition: Une connexion ∇ sur $\mathcal{E}$, compatible à la graduation, est un opérateur densément défini sur $\Omega(M,E)$ qui augmente le degré par 1 et qui satisfait à la relation,

$$\nabla(\alpha\omega)=\nabla(\alpha)\omega + \sigma(\alpha)d\omega. \blacksquare\blacksquare\blacksquare$$

Tenant compte des remarques ci-dessus, on vérifie facilement que la différence de deux super-connexions est un élément de $Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(M)$. En particulier, D.Quillen [Q] a introduit la notion de superconnexion (on pourrait aussi proposer l'etiquette "connexion graduée") d'être une somme $\nabla+iL$ où ∇ est l'extension à $\Omega(M,E)$ d'une connexion sur $\mathcal{E}$, compatible à la graduation, et où L est l'extension à $\Omega(M,E)$ par $\Omega(M)$-linéarité d'un élément impair de $Op(\mathcal{E})$. En particulier, par rapport à la décomposition $\Omega(M,E)=\Omega(M,E^+)\oplus\Omega(M,E^-)$, la connexion ∇ s'écrit de la forme,

$$\begin{bmatrix} \nabla_+ & 0 \\ 0 & \nabla_- \end{bmatrix}$$

où $\nabla_\pm$ est une connexion sur $\Omega(M,E^\pm)$ pour la graduation triviale. La décomposition de $\Omega(M)$ en formes différentielles de type (p,q) induit une telle décomposition de $\Omega(M,E)$. En particulier, ∇ augmente par 1 le degré des formes donc, pour $p,q=0,\dots,n-1$, l'opérateur ∇ restreint à $\Omega^{p+q}(M,E)$ a pour image dans $\Omega^{p+q+1}(M,E)$ un sous-espace de $\Omega^{p,q+1}(M,E)\oplus\Omega^{p+1,q}(M,E)$. On a donc une décomposition $\nabla=\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1}$ en une composante de type $(1,0)$ et une composante de type $(0,1)$, induite par la décomposition de la différentielle de de-Rham en différentielles de Dolbeault $d=\partial+\bar{\partial}$. On définit les sous-ensembles de la sous-algèbre $Op_\circ=Op(\mathcal{E})\otimes 1$ de $Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(M)$ que voici:

$Op^{1,0}(\nabla)=\{\mathcal{F}\otimes 1\in Op_\circ ; [\nabla^{0,1},\mathcal{F}\otimes 1]=0\}$, $Op^{0,1}(\nabla)=\{\mathcal{F}\otimes 1\in Op_\circ ; [\nabla^{1,0},\mathcal{F}\otimes 1]=0\}$, où les commutateurs sont gradués. On pose $Op^1(\nabla)=Op^{1,0}(\nabla)+Op^{0,1}(\nabla)$, la somme n'étant pas forcément une somme directe, et on écrit $Op^{1,1}(\nabla)$ pour les éléments de $Op_\circ$ qui sont des sommes de termes de la forme $(\mathcal{F}_1\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2\mathcal{F}_2)\otimes 1$ où $\mathcal{F}_i\otimes 1\in Op^{1,0}(\nabla)$ et $\mathfrak{G}_i\otimes 1\in Op^{0,1}(\nabla)$, $i=1,2$. On introduit le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $Op^1(\nabla)^*$ composé des $F\in Op^1(\nabla)$ de la forme $F=\mathcal{F}\otimes 1+\mathcal{F}^*\otimes 1$ où $\mathcal{F}\otimes 1\in Op^{1,0}(\nabla)$ et $\mathcal{F}^*\otimes 1\in Op^{0,1}(\nabla)$, et celui $Op^{1,1}(\nabla)^*$ engendré par les expressions dans $Op^{1,1}(\nabla)$, de type Laplacien, $(\mathcal{F}\mathcal{F}^*+\mathcal{F}^*\mathcal{F})\otimes 1$ avec $\mathcal{F}\otimes 1\in Op^{1,0}(\nabla)$ et $\mathcal{F}^*\otimes 1\in Op^{0,1}(\nabla)$. Par construction, les éléments de $Op^1(\nabla)^*$ et $Op^{1,1}(\nabla)^*$ sont auto-adjoints. Le $\mathfrak{B}$-module $Op^1(\Omega)=Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^1(M)$ des 1-formes à valeurs dans $Op(\mathcal{E})$ se décompose suivant $Op^1(\Omega)=Op^{1,0}(\Omega)\oplus Op^{0,1}(\Omega)$ avec $Op^{1,0}(\Omega)=Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^{1,0}(M)$ et $Op^{0,1}(\Omega)=Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^{0,1}(M)$. On peut aussi fabriquer les $\mathfrak{B}$-modules à droite $Op^{1,1}(\Omega)=Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^{1,1}(M)$ et $End^{1,1}(\Omega)=\mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^{1,1}(M)$. Par exemple, on voit facilement que la courbure ∇^2 de ∇ est un élément de $Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^2(M)$, et si l'on compare les degrés, on voit que $\nabla^{1,0}\nabla^{0,1}+\nabla^{0,1}\nabla^{1,0}$ est un élément de $Op^{1,1}(\Omega)$. On propose la définition suivante.

Définition:

Une connexion graduée $\nabla(S)=\nabla+iL$, $\nabla=\nabla_+ +\nabla_-$, sur $\Omega(M,E)=\Omega(M,E^+)\oplus\Omega(M,E^-)$ est holomorphe si

(1) pour tout $\alpha,\beta\in Dom(\nabla_\pm)\cap\Omega(M,E^\pm)$ on a

$$d<\alpha,\beta>_\pm=<\nabla_\pm\alpha,\beta>+<\alpha,\nabla_\pm\beta>,$$

(2) $L\in Op^1(\nabla)^*$ est un opérateur impair, densément défini, fermé, auto-adjoint tel que $(1+L^2)$ soit inversible en un opérateur compact. En particulier, on peut écrire $L=\mathcal{L}+\mathcal{L}^*$ où $[\nabla,L]=[\nabla^{1,0},\mathcal{L}]+[\nabla^{0,1},\mathcal{L}^*]$.

(3) on a $[\nabla,L]\in\mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega^1(M)$, $\nabla^2\in Op^{1,1}(\Omega)$, et $L^2\in Op^{1,1}(\nabla)^*$. On dit que ∇ est de courbure bornée si $\nabla^2\in End^{1,1}(\Omega)$. Notons que

$$Op^{1,0}(\mathcal{E})\cap Op^{0,1}(\mathcal{E})=\{\mathcal{F}\in Op^1(\mathcal{E})\mid [\nabla,\mathcal{F}]=0\}.$$

Remarque: On observe avec [B-G-S] que pour un fibré vectoriel complex sur M, à fibres de dimension finie, il y a une correspondance biunivoque entre structures holomorphes et connexions hermitiennes holomorphes, une fois que celles-ci existent. C'est une conséquence d'un théorème de Newlander-Nirenberg [A-H-S,Théorème 5.1]. Ces méthodes ne s'étendent pas au cas de dimension infinie.

Image directe de Gillet et Soulé et superconnexions holomorphes

On commence par rappeller la définition d'une connexion holomorphe dans le cas d'un fibré hermitien de rang fini. Soit M une variété complexe à fibré cotangent complexifié $T^*(M)=T^*(M)^{1,0}\oplus T^*(M)^{0,1}$ et différentielle de de-Rham $d=d_M$. Sur un fibré vectoriel F sur M, un d-connexion $\nabla:C_c^\infty(M,F)\dashrightarrow C_c^\infty(M,F\otimes_{\mathbb{C}}T^*(M))$ est munie d'une décomposition naturelle $\nabla=\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1}$ induite par la structure complexe sur M et déterminée par les restrictions de ∇ que voici,

$$\nabla^{1,0}:C_c^\infty(M,F)\dashrightarrow C_c^\infty(M,F\otimes_{\mathbb{C}}T^*(M)^{1,0})$$
$$\nabla^{0,1}:C_c^\infty(M,F)\dashrightarrow C_c^\infty(M,F\otimes_{\mathbb{C}}T^*(M)^{0,1}).$$

De plus, si F est un fibré holomorphe hermitien de rang fini, il existe une connexion qui satisfait aux propriétés suivantes,

(i) pour tout ensemble ouvert U de M et tout $\alpha,\beta\in C^\infty(U,F)$,

$$d<\alpha,\beta>=<\nabla\alpha,\beta>+<\alpha,\nabla\beta>$$

où $<\ ,\ >$ est l'extension naturelle aux formes à valeurs dans F de la métrique définie fibre par fibre sur F,

(ii) l'opérateur $\bar\partial_M$ donné par la composante (0,1) de la différentielle de de-Rham a une extension $\nabla^{0,1}$ à $C_c^\infty(M,F)$. C'est la condition d'integrabilité de la structure complexe grace à la possibilité de choisir un système de coordonnées locales tel que les fonctions de transition soient holomorphes.∎∎∎

Cette connexion holomorphe sur F détermine les sections holomorphes $\Gamma(M,F)=\mathrm{Ker}\nabla^{1,0}$ sur M à valeurs dans F (dans le cas $\dim_{\mathbb{C}}M=1$, une fois qu'une connexion satisfasse à (i) elle détermine une structure holomorphe sur F de cette façon). La connexion peut etre étendue de façon naturelle à une application

$$\nabla:C_c^\infty(M,F\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^*T^*(M))\rightarrow C_c^\infty(M,F\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^*T^*(M)),$$

dont la courbure ∇^2 est dans $C_c^\infty(M,End(F)\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^{1,1}T^*(M))$. Considérons l'exemple suivant de C.Soulé et H.Gillet [G-S]. On part de deux variétés complexes X et Y, avec X localement compacte et Y compacte (et de plus Kählerienne pour les applications dans [G-S]) à forme différentielle de volume μ_Y. On se donne un fibré hermitien holomorphe E_0 sur $X\times Y$ à métrique h_0. Soit $\pi:X\times Y\to X$ la projection sur la première composante. Pour tout $x\in X$, la restriction $E_{0,x}$ de E_0 à $\{x\}\times Y$ est un fibré hermitien holomorphe sur Y dont les sections $\Gamma(Y,E_{0,x})$ seront supposées d'être le fibre à x d'un fibré Hermitien holomorphe π_*E_0 sur X, à métrique π_*h_0 donnée par

$$(\pi_*h_0)(\sigma,\sigma')=\int_Y h_0(\sigma(y),\sigma'(y))\mu_Y(y) \quad \text{pour } \sigma,\sigma'\in\Gamma(Y,E_{0,x}).$$

On note par $\tilde\nabla$ une connexion holomorphe qui définit la structure holomorphe sur E_0. En particulier, on a une application

$$\tilde\nabla:\ C_c^\infty(X\times Y,E_0\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^*T^*(X\times Y)) \dashrightarrow C_c^\infty(X\times Y,E_0\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^*T^*(X\times Y))$$

qui satisfait à (i) et (ii) avec $M=X\times Y$ et $F=E_0$. Pour $(x,y)\in X\times Y$, l'espace cotangent $T^*_{(x,y)}(X\times Y)$ est isomorphe de façon naturelle à la somme externe $T_x^*(X)\oplus T_y^*(Y)$. Donc, si F est un fibré vectoriel sur $X\times Y$ on peut considérer une application,

$$L:C_c^\infty(X\times Y,F)\dashrightarrow C_c^\infty(X\times Y,F\otimes_{\mathbb{C}}T^*(X\times Y))$$

comme une somme $L=L_x\oplus L_y$ avec

$$L_x:C_c^\infty(X\times Y,F)\dashrightarrow C_c^\infty(X\times Y,F\otimes_{\mathbb{C}}T^*(X))$$
$$L_y:C_c^\infty(X\times Y,F)\dashrightarrow C_c^\infty(X\times Y,F\otimes_{\mathbb{C}}T^*(Y)).$$

De plus, on peut interpreter $\Lambda^*T_x^*(X)$ et $\Lambda^*T_y^*(Y)$ comme des sous-espaces de $\Lambda^*T^*_{(x,y)}(X\times Y)$ et donc former les sous-fibrés $F\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^*T^*(X)$ et $\Lambda^*T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}F$ de $F\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^*T^*(X\times Y)$. Ici, comme dans la suite, les formes différentielles sur Y sont écrites à gauche dans ce produit, pour respecter une convention d'après laquelle l'action de l'algèbre $\mathcal{A}=C_c^\infty(Y)$ sera à gauche, et de l'algèbre $\mathcal{B}=C_c^\infty(X)$ à droite. Ces deux algèbres peuvent être considérées de sous-algèbres de $C_c^\infty(X\times Y)$. En particulier, $\tilde\nabla$ agit par restriction sur $C_c^\infty(X\times Y,\Lambda^*T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0)$ et on peut prendre la composante de cette restriction dans la direction de X:

$$\tilde\nabla_X:\ C_c^\infty(X\times Y,\Lambda^*T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0) \dashrightarrow C_c^\infty(X\times Y,\Lambda^*T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0\otimes_{\mathbb{C}}T^*(X)).$$

Pour tout $v\in T(X)$, il existe un seul $\hat v\in T(X\times Y)$ dont la projection sur $T(Y)$ est l'élément zéro. Pour un ensemble ouvert U de X, et une section $\sigma\in C^{\infty}(U\times Y,\Lambda^{*}T^{*}(Y)\otimes_{\mathbb{C}} E_0)$ on observe que pour $(x,y)\in U\times Y$ on a

$$\tilde{\nabla}_X(\sigma)(v)(x,y) = \tilde{\nabla}(\sigma)(\hat{v})(x,y)\ .$$

Les propriétés suivantes de $\tilde{\nabla}_X$ découlent des propriétés correspondantes pour $\tilde{\nabla}$,

(α) $\tilde{\nabla}_X(\sigma b)= (\tilde{\nabla}_X(\sigma))b + \sigma\otimes d_X b,\ \ b\in\mathfrak{B}$,

(β) $d_X(h_0(\sigma,\sigma'))(v) = h_0(\tilde{\nabla}_X(\sigma)(v),\sigma')+h_0(\sigma,\tilde{\nabla}_X(\sigma'(\bar{v}))$,

(γ) $\tilde{\nabla}_X^{0,1}$ est l'opérateur $\bar{\partial}_X$, qui peut etre vu comme une composante de $\bar{\partial}_{X\times Y}$,

(δ) $\tilde{\nabla}_X$ s'étend aux sections de $X\times Y$ à valeurs dans $\Lambda^{*}T^{*}(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^{*}T^{*}(X)$ et $\tilde{\nabla}_X^{2}$ définit un élément de $C_c^{\infty}(X\times Y,End(\Lambda^{*}T^{*}(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0)\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^{1,1}T^{*}(X))$■■■

Si F est un fibré holomorphe hermitien sur Y, il existe une façon évidente de construire un couple d'espaces hilbertiens dans lesquels opère l'algèbre $\mathcal{A}=C^{\infty}(Y)$, et un opérateur de Fredholm entre ces espaces: On écrit $\mathcal{F}=C^{\infty}(Y,F)$ pour le $\mathcal{A}$-module à gauche de sections lisses sur Y à valeurs dans F. Le $\mathcal{A}$-module à gauche de $(0,1)$ formes $\Omega^{0,1}(Y,F)=C^{\infty}(Y,\Lambda^{0,1}T^{*}(Y)\otimes_{\mathbb{C}}F)$ à valeurs dans F est isomorphe à $\Omega^{0,1}(Y)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$, où $\Omega^{0,1}(Y)$ est le $\mathcal{A}$-bi-module de $(0,1)$-formes sur Y. Comme F est holomorphe, la différentielle de Dolbeault sur Y a une extension naturelle $\bar{\partial}:\mathcal{F}\dashrightarrow\Omega^{0,1}(Y)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$. Pour tout $a\in\mathcal{A}$, on a $\bar{\partial}a$ dans $\Omega^{0,1}(Y)$ qui définit par le produit tensoriel à gauche une application entre $\mathcal{F}$ et $\Omega^{0,1}(Y)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$. Les fibrés vectoriels $F_0=F$ et $F_1=\Lambda^{0,1}T^{*}(Y)\otimes_{\mathbb{C}}F$ sont munis d'un produit scalaire hermitien fibre par fibre, qui rend une définition intrinsèque des produits scalaires sur $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1=\Omega^{0,1}(Y,F)$ vus comme espaces vectoriels complexes par la relation

$$<\alpha,\beta>_j = \int_Y <\alpha(y),\beta(y)>_{F_j}\mu_Y(y)\ \ ;\quad \alpha,\beta\in\mathcal{F}_j\ ,j=0,1.$$

Soit H_j le L^2-complété de $\mathcal{F}_j$ par rapport à $<\ ,\ >_j$; $j=0,1$. L'opérateur $\bar{\partial}$ est muni d'une extension unique continue en opérateur $D:H_0\to H_1$ d'adjoint $D^{*}:H_1\to H_0$. L'espace Hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué $H=H_0\oplus H_1$ est donc muni d'un opérateur impair $\mathfrak{D}$, dont la matrice par rapport à cette décomposition s'écrit

$$\mathfrak{D}=\begin{bmatrix} 0 & D^{*} \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

et celle de son carré ,

$$\mathfrak{D}^2 = \begin{bmatrix} D^*D & 0 \\ 0 & DD^* \end{bmatrix}.$$

Les deux opérateurs D et D^* sont des opérateurs non-bornés densément définis. De plus, $\bar{\partial}$ est un opérateur elliptique et donc les deux espaces KerD et KerD^* sont de dimension finie (D est un opérateur de Fredholm). Les opérateurs $1+D^*D$, $1+DD^*$ sont auto-adjoints sur H_0,H_1 et inversibles à inverses compactes. Clairement, chaque $a\in\mathcal{A}$ définit, par extension continue de la multiplication à gauche, une représentation comme élément pair de l'algèbre des opérateurs $\mathcal{L}(H)$ de H. De la meme façon, $[D,a] : H_0 \to H_1$ redonne la tensorisation à gauche par $\bar{\partial}a$, et définit un élément impaire de $\mathcal{L}(H)$. En utilisant la formule pour $< , >_j$, $j=0,1$, on vérifie que la representation de $\mathcal{A}$ dans H est une répresentation étoile compatible à la conjugaison complexe dans $\mathcal{A}$ et à l'application adjointe pour $\mathcal{L}(H)$. Par exemple, en écrivant $\bar{a}=a^*$, l'adjointe de $[D,a]$ est $[\bar{a},D^*]:H_1\to H_0$, un élément impair de $\mathcal{L}(H)$. On observe que $i[D,a] = (i[D^*,a^*])^*$. De cette façon, on a associé à la projection naturelle du fibré F sur la variété Y et à l'opérateur $\bar{\partial}:\mathcal{A}\to\Omega^{0,1}(Y)$, $\mathcal{A} = C^\infty(Y)$, les objets suivants,

(1) un espace hilbertien H muni d'une $\mathbb{Z}/2$-graduation à automorphisme de graduation ε,

(2) une action de $\mathcal{A}$ à gauche dans H qui fournit une représentation étoile de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(H)$ qui commute à ε,

(3) un opérateur auto-adjoint $\mathfrak{D}$ sur H qui satisfait à

(a) $\varepsilon\mathfrak{D}=-\mathfrak{D}\varepsilon$,

(b) $\mathfrak{D}$ est fermé et densément défini,

(c) l'opérateur $1+\mathfrak{D}^2$ est inversible et, pour tout $a\in\mathcal{A}$, $a(1+\mathfrak{D}^2)^{-1}$ est un opérateur compact,

(d) pour tout $a\in\mathcal{A}$, l'opérateur $[\mathfrak{D},a]$ est défini sur le domaine de $\mathfrak{D}$ et s'étend à un opérateur borné sur H,

(e) il y a un opérateur impair D sur H tel que $\mathfrak{D}=D+D^*$ et $\mathfrak{D}^2=DD^*+D^*D$.■■■

En particulier, le couple (H,D) fournit un représentant non-borné [B-J] de l'élément du groupe de Kasparov bi-variant $KK(\mathcal{A},\mathbb{C})$, et

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

remplit la condition d'être une connexion graduée associée à un tel élément (voir par exemple [B-J]). Pour revenir à l'exemple cité dans [G-S], on a pour tout $x \in X$, un fibré holomorphe hermitien $E_{0,x}$, et les fibrés associées $\Lambda^{0,p}T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_{0,x}$, $p \geqslant 0$. Pour $p \geqslant 0$, on note par $\mathcal{F}^p_x$ le module à gauche de formes de type $(0,p)$ sur Y à valeurs dans $E_{0,x}$. On a donc $\mathcal{F}^0_x = C^\infty(Y,E_{0,x})$, $\mathcal{F}^p_x = \Omega^{0,p}(Y)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}^0_x$. Soit $n = \dim_{\mathbb{C}} Y$, et introduisons le complexe acyclique suivant

$$0 \to \Gamma(Y,E_{0,x}) \to^{j} \mathcal{F}^0_x \to^{\bar\partial} \mathcal{F}^1_x \to^{\bar\partial} \dots \to^{\bar\partial} \mathcal{F}^n_x \to 0$$

où j est une inclusion. Pour chaque $p \geqslant 0$, on peut appliquer la construction précédente avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}^p_x$ (où on remplace, pour $p \geqslant 1$, le produit tensoriel à gauche par $\Lambda^{0,1}T^*(Y)$, par le produit extérieur, l'anneau de base étant un corps) pour obtenir un couple d'espaces Hilbertiens H^p, H^{p+1} avec les opérateurs $D_p : H^p \to H^{p+1}$, $D_p^* : H^{p+1} \to H^p$ induits de $\bar\partial_Y : \mathcal{F}^p_x \to \mathcal{F}^{p+1}_x$ et $\bar\partial_Y^* : \mathcal{F}^{p+1}_x \to \mathcal{F}^p_x$ respectivement. Comme on a commencé avec un complexe acyclique on a les applications suivantes pour chaque $p \geqslant 1$:

$$H^p \xrightarrow{(D_{p-1})^*} H^{p-1} \xrightarrow{(D_{p-1})} H^p \ , \ \text{et} \ H^p \xrightarrow{(D_p)} H^{p+1} \xrightarrow{(D_p)^*} H^p$$

et les relations $\qquad D_p D_{p-1} = (D_{p-1})^*(D_p)^* = 0.$

Donc $\quad (D_p+(D_{p-1})^*)((D_p)^*+D_{p-1}) = D_p(D_p)^*+(D_{p-1})^*D_{p-1}$

$\qquad (D_{p-1}+(D_p)^*)(D_p+(D_{p-1})^*) = D_{p-1}(D_{p-1})^*+(D_p)^*D_p$.

Maintenant, on introduit les sommes finies d'espaces Hilbertiens $H^+_x = \oplus_{m\geq 0} H^{2m}$, et $H^-_x = \oplus_{m\geq 0} H^{2m+1}$ (où on pose $H^p = 0$, $p>n$), et les opérateurs

$$F_x = \oplus_{m\geq 0}(D_{2m}+(D_{2m-1})^*) : H^+_x \to H^-_x \ ,$$

$$(F_x)^* = \oplus_{m\geq 0}((D_{2m})^*+D_{2m-1}) : H^-_x \to H^+_x$$

(où on pose $D_p = 0, p>n, p<0$). Sur l'espace Hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué $H_x = H^+_x \oplus H^-_x$ on définit un opérateur impair D_x par,

$$\begin{bmatrix} 0 & (F^*)_x \\ F_x & 0 \end{bmatrix}$$

L'opérateur D_x se décompose en une somme de deux opérateurs impairs $D_x=\rho_x+(\rho^*)_x$, où ρ_x et $(\rho^*)_x$ sont respectivement,

$$\begin{bmatrix} 0 & (\rho)_{1,x} \\ (\rho)_{0,x} & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & (\rho^*)_{0,x} \\ (\rho^*)_{1,x} & 0 \end{bmatrix}.$$

On voit facilement que l'on a une somme finie mais pas directe d'espaces de Hilbert, $H_x = +_{(p\geq 0)}(H^p+H^{p+1})$ et une décomposition associée de l'opérateur, $D_x = +_{(p\geq 0)}(\rho_p+(\rho^*)_p)$. De plus, l'acyclicité du complexe introduit au début entraine que, par rapport à la décomposition $H_x=H_x^++H_x^-$, on a pour D_x,

$$\begin{bmatrix} 0 & (\rho^*)_{0,x}+(\rho)_{1,x} \\ (\rho)_{0,x}+(\rho^*)_{1,x} & 0 \end{bmatrix}$$

et donc pour D_x^2,

$$\begin{bmatrix} \oplus_{m\geq 0}(\rho^*)_{2m}(\rho)_{2m}+(\rho)_{2m-1}(\rho^*)_{2m-1} & 0 \\ 0 & \oplus_{m\geq 0}(\rho)_{2m}(\rho^*)_{2m}+(\rho^*)_{2m-1}(\rho)_{2m-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\rho^*{}_{0,x})(\rho_{0,x})+(\rho_{1,x})(\rho^*{}_{1,x}) & 0 \\ 0 & (\rho_{0,x})(\rho^*{}_{0,x})+(\rho^*{}_{1,x})(\rho_{1,x}) \end{bmatrix}.$$

Pour tout $x\in X$ le couple (H_x,D_x) est un représentant non-borné du foncteur bi-variant de Kasparov $KK(\mathcal{A},\mathbb{C})$. Le fibré $\mathbb{Z}/2$-gradué à fibres de dimension infinie $E=\cup_{x\in X}H_x$ a une décomposition $E=E^+\oplus E^-$, où $E^+=\cup_{x\in X}H_x^+$ et $E^-=\cup_{x\in X}H_x^-$, et on note par ε l'automorphisme qui définit la graduation du $\mathcal{B}=C_c^\infty(X)$-module à droite correspondant $\mathcal{E}=C_c^\infty(X,E)=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$, où $\mathcal{E}^+=C_c^\infty(X,E^+),\mathcal{E}^-=C_c^\infty(X,E^-)$.

Soit Op($\mathcal{E}$) l'anneau des opérateurs densément définis sur $\mathcal{E}$. L'application D, dont la valeur à x est l'application linéaire D_x, est un élément impair de Op($\mathcal{E}$) qui s'étend convenablement à un élément impair de l'algèbre $\mathbb{Z}/2$-graduée $Op(\mathcal{E})\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(X)$, où $\Omega(X)$ est le $\mathfrak{B}$-bi-module $C_c^\infty(X,\Lambda^*T^*(X))$ de formes différentielles lisses à support compact sur X. La décomposition $D_x=\rho_x+(\rho_x)^*$ à chaque $x\in X$ induit une décomposition $D=\rho+\rho^*$,

$$\rho=\begin{bmatrix} 0 & \rho_1 \\ \rho_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On définit une connexion ∇ sur $\mathcal{E}$, compatible à la graduation ε, de la façon suivante. Soit U un ensemble ouvert de X et σ une section sur U×Y telle que pour chaque $x\in U$, $\sigma|_{\{x\}\times Y}$ donne une section sur Y, dont la valeur à $y\in Y$ est un élément de $\Lambda^{0,p(x)}T_y^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_{0,(x,y)}$. De cette manière on peut considérer σ comme un élément de $C^\infty(U\times Y,\Lambda^{0,*}T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0)$, vu comme sous-ensemble de $C^\infty(U\times Y,\Lambda^*T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0)$. Soit $\nabla(\sigma)$ l'image de $\varepsilon\sigma$ par la connexion déja à notre portée $\tilde{\nabla}_X$ définie le long de X, et qui s'étend à un opérateur ∇ densément défini sur l'espace de Banach $\mathcal{E}$, où il est pair . La propriété (α) de $\tilde{\nabla}_x$ entraine la propriété suivante d'une connexion graduée

$(\alpha)_S$ $\nabla(\xi b)=(\nabla(\xi))b+\varepsilon(\xi)\otimes d_x b$, $\xi\in Dom(\nabla)$, $b\in\mathfrak{B}$.

C'est clair que par rapport à la décomposition $\mathcal{E}=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$, la connexion ∇ s'écrit de la forme

$$\begin{bmatrix} \nabla_+ & 0 \\ 0 & \nabla_- \end{bmatrix}$$

où ∇_+ ,∇_- sont des d_x-connexions pour la graduation triviale sur $\mathcal{E}^+,\mathcal{E}^-$ respectivement. Soient $\mathcal{E}^\circ,\nabla^\circ=\mathcal{E}^\pm,\nabla_\pm$, U un ouvert dans X et $\sigma,\sigma'\in\mathcal{E}^\circ\cap C^\infty(U\times Y,\Lambda^*T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}}E_0)$. La propriété ($\beta$) de $\tilde{\nabla}_X$ entraine que

$$d_X(h_0(\sigma,\sigma'))=h_0(\nabla^\circ(\sigma),\sigma')+h_0(\sigma,\nabla^\circ(\sigma')).$$

Pour tout $(x,y)\in U\times Y$ on a

$$d_X\left(\int_Y h_0(\sigma(x,y),\sigma'(x,y))\mu_Y(y)\right)=\int_Y h_0(\nabla^\circ(\sigma)(x,y),\sigma'(x,y))\mu_Y(y)+\int_Y h_0(\sigma(x,y),\nabla^\circ(\sigma')(x,y))\mu_Y(y)$$

d'où $\qquad d_X\langle\sigma,\sigma'\rangle_0=\langle\nabla^\circ(\sigma),\sigma'\rangle_0+\langle\sigma,\nabla^\circ(\sigma')\rangle_0$

pour $\langle\ ,\ \rangle_0$ le produit scalaire sur $\mathcal{E}^\circ$ à valeurs dans $\mathfrak{B}$, qui se specialise aux métriques hermitiennes déja construites sur les $\mathcal{F}^0_x$, $x\in X$. Cette relation reste vraie pour la complétion L^2, et $\langle\ ,\ \rangle_0$ induit des produits scalaires $\langle\ ,\ \rangle_+$ et $\langle\ ,\ \rangle_-$ sur $\mathcal{E}^+,\mathcal{E}^-$ à valeurs dans $\mathfrak{B}$. Ce sont les métriques induites par les métriques hermitiennes par rapport auquel chaque fibre de E^+, E^- est complet. La somme directe $E=E^+\oplus E^-$ est un fibré hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué à fibres de dimension infinie..La relation suivante de compatibilité de $\nabla\varepsilon$ avec la métrique est donc claire

$(\beta)_S \quad d_X\langle\sigma,\sigma'\rangle=\langle\nabla(\varepsilon(\sigma)),\sigma'\rangle + \langle\sigma,\nabla(\varepsilon(\sigma'))\rangle,\ \ \sigma,\sigma'\in\mathrm{Dom}(\nabla).$

L'algèbre $\mathfrak{B}$ est une C^*-algèbre et le $\mathfrak{B}$-module à droite $\mathbb{Z}/2$-gradué $\mathcal{E}=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$, muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, un C^*-module. En particulier, si l'on désigne par * l'opération de conjugaison complexe dans $\mathfrak{B}$, et par $\|\ \|_{\mathfrak{B}}$ sa norme, on a

1)' $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle^*$, $\ \alpha,\beta\in\mathcal{E}$,

2)' $\langle\alpha,\alpha\rangle$ est un élément positif de $\mathfrak{B}$, pour tout $\alpha\in\mathcal{E}$,

3)' $\langle\alpha,\beta b\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle b$, $\ \alpha,\beta\in\mathcal{E}$, $b\in\mathfrak{B}$,

4)' $\mathcal{E}$ est un espace de Banach pour la norme $\alpha\mapsto\|\langle\alpha,\alpha\rangle\|^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{B}}$.

De plus, les propriétés 3)(a),...,3)(d) sont parmi celles de l'opérateur $\mathfrak{B}$-linéaire D, lorsque l'on remplace H par $\mathcal{E}$. Par construction $\mathcal{E}$ porte la structure d'un $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$ bi-module (action à gauche par $\mathcal{A}$ et à droite par $\mathfrak{B}$). Le couple $(\mathcal{E},D)$ est un représentant non borné du groupe de Kasparov $KK(\mathcal{A},\mathfrak{B})$, qui comprend une famille d'éléments (H_x,D_x), $x\in X$.

Pour revenir à la connexion graduée ∇, qui s'étend de façon évidente à $\mathcal{E}\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(X)$, et qui satisfait au règle de Leibnitz

$$\nabla(\tau.\omega)=\nabla(\tau).\omega+\Theta(\tau).d_X\omega$$

où Θ désigne l'automorphisme de la $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}$-graduation de $\mathcal{E}\otimes_{\mathfrak{B}}\Omega(X)$. C'est clair de la propriété (δ) de $\tilde{\nabla}_X$, que la courbure ∇^2 est l'extension d'une section sur

$X\times Y$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\wedge^* T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}} E_0)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^{1,1}T^*(X)$. La variété Y étant de dimension finie, et le fibré E_0 de rang fini, les éléments de $\mathrm{End}(\wedge^* T^*(Y)\otimes_{\mathbb{C}} E_0)$ sont bornés, ayant un domaine de dimension finie. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'algèbre des endomorphismes bornés $\mathcal{B}$-linéaires du C^*-module $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{B}$, alors la courbure ∇^2 tombe dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{B}}\Omega^{1,1}(X)$. A propos, ∇^2 est la courbure du fibré du départ E_0 le long de X, et malgré le fait que E est à fibres de dimension infinie, ∇^2 ne s'annule pas forcément. Pour résumer, on a

$$(\gamma)_s \qquad \nabla^2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{B}}\Omega^{1,1}(X).$$

La construction de la connexion graduée $\nabla+iD$ sur $\mathcal{E}=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$ est donc achevée, et s'écrit par rapport à cette décomposition

$$\begin{bmatrix} \nabla_+^{1,0}+\nabla_+^{0,1} & i\rho_1+i\rho_0^* \\ i\rho_1^*+i\rho_0 & -\nabla_-^{1,0}-\nabla_-^{0,1} \end{bmatrix}$$

Pour terminer cette discussion des propriétés holomorphes de cette connexion graduée il reste à examiner le terme de couplage donné par le commutateur gradué $[\nabla,D]$. On vérifie d'abord que $[\nabla^{0,1},D]=0$. La propriété (γ) de $\tilde{\nabla}_X^{0,1}$, et les constructions de ∇ et de ρ rammènent cette relation au fait évident donné par la relation $(\bar\partial_X\bar\partial_Y-\bar\partial_Y\bar\partial_X)(\sigma)=0$, pour σ une section sur $X\times Y$ à valeurs dans $E_0\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^*T^*(X\times Y)$, où $\bar\partial_X$ et $\bar\partial_Y$ sont des composantes de $\bar\partial_{X\times Y}$. Il sera commode pour la suite de remarquer que pour $\mathcal{L}\in\mathrm{Op}(\mathcal{E})$, les relations $[\nabla^{1,0},\mathcal{L}]=0$ et $[\nabla^{0,1},\mathcal{L}^*]=0$ sont équivalentes. C'est une conséquence de la compatibilité de $\nabla\varepsilon$ à $<\,,\,>$. Pour le voir, on a pour tout $v\in T(X)$ et $\sigma,\sigma'\in\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} <[\nabla,\mathcal{L}](\sigma)(v),\sigma'> &= <\nabla(\mathcal{L}(\sigma)(v),\sigma'>-<\mathcal{L}(\nabla(\sigma))(v),\sigma'> \\ &= -<\mathcal{L}(\varepsilon\sigma),\nabla(\sigma')(\bar v)>+d_X<\mathcal{L}(\varepsilon(\sigma)),\sigma'>(v)-<\nabla(\sigma)(v),\mathcal{L}^*(\sigma')> \\ &= -<\varepsilon(\sigma),\mathcal{L}^*(\nabla(\sigma'))(\bar v)>+<\varepsilon(\sigma),\nabla(\mathcal{L}^*(\sigma'))(v)> \\ &= <\varepsilon(\sigma),[\nabla,\mathcal{L}^*](\sigma')(\bar v)>, \end{aligned}$$

d'où la remarque, car $\overline{T^{1,0}(X)}=T^{0,1}(X)$. Pour l'exemple courant, on aurait pu raisonner plus directement. On a les relations de commutation suivantes

$$[\nabla^{0,1},\rho]=[\nabla^{1,0},\rho^*]=0.$$

Il reste à vérifier que $[\nabla^{1,0},\rho]$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{B}}\Omega^{1,0}(X)$, et que $[\nabla^{0,1},\rho^*]$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{B}}\Omega^{0,1}(X)$. On peut le voir directement en utilisant un argument de dimensionalité de la même façon que pour ∇^2. On observe que la courbure de la connexion graduée $\nabla + iD$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \nabla_+^{1,0}\nabla_+^{0,1} + \nabla_+^{0,1}\nabla_+^{1,0} - \rho_0^*\rho_0 - \rho_1\rho_1^* & i(\nabla_+^{1,0}\rho_1 - \rho_1\nabla_-^{1,0} + \nabla_+^{0,1}\rho_0^* - \rho_0^*\nabla_-^{0,1}) \\ i(-\nabla_-^{1,0}\rho_0 + \rho_0\nabla_+^{1,0} - \nabla_-^{0,1}\rho_1^* + \rho_1^*\nabla_+^{0,1}) & \nabla_-^{1,0}\nabla_-^{0,1} + \nabla_-^{0,1}\nabla_-^{1,0} - \rho_0\rho_0^* - \rho_1^*\rho_1 \end{bmatrix}$$

Bien entendu, si l'on oublie l'action de l'algèbre $\mathcal{A}$ à gauche, le couple $(\mathcal{E}, D)$ est un représentant nonborné du groupe bivariant de Kasparov $KK(\mathbb{C}, \mathfrak{B})$, associé au fibré Hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué $E = E^+ \oplus E^-$ et l'opérateur de Fredholm impair $D: E \to E$. La discussion que l'on vient de suivre montre que l'exemple tiré de [G-S] fournit une connexion graduée $\nabla + iD$ sur E qui est holomorphe suivant la définition proposée, et qui munit E d'une structure holomorphe.

Il faut cependant citer quelques différences: D'abord dans [G-S], il n'y a pas mention des C^*-modules et le complété des fibres par rapport au produit scalaire n'est pas pris. Le fibré $\pi^* E_0$ introduit au début est inclus dans la somme directe, donc pour chaque $x \in X$, il faut considérer le complexe acyclique

$$0 \to \Gamma(Y, E_{0,x}) \xrightarrow{j_x} \mathcal{F}_x^0 \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{F}_x^n \to 0.$$

Dans l'exemple de [G-S], après complétion, à chaque $x \in X$ on tombe sur l'espace de dimension infinie $\tilde{H}_x = \tilde{H}_x^+ \oplus \tilde{H}_x^-$, où $\tilde{H}_x^+ = H_x^+$ et $\tilde{H}_x^- = H_x^- \oplus \Gamma(Y, E_{0,x})$, et l'opérateur impaire $\tilde{D}_x$,

$$\begin{bmatrix} 0 & \rho_{0,x}^* + j_x^* + \rho_{1,x} \\ \rho_{0,x} + j_x + \rho_{1,x}^* & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut maintenant fabriquer le fibré Hilbertien $\mathbb{Z}/2$-gradué correspondant $\tilde{E} = \tilde{E}^+ \oplus \tilde{E}^-$, où $\tilde{E}^+ = E^+$, et $\tilde{E}^- = E^- \oplus \pi_* E_0$, avec la métrique $\langle\, , \rangle^{\sim} = \langle\, , \rangle + \pi_* h_0$ et l'opérateur impair $\tilde{D}$ donné par,

$$\begin{bmatrix} 0 & \rho_0^* + \rho_1 + j^* \\ \rho_0 + \rho_1^* + j & 0 \end{bmatrix}$$

Un calcul simple montre que le carré $\tilde{D}^2$ de $\tilde{D}$ est egal à

$$\begin{bmatrix} \rho_0^*\rho_0+\rho_1\rho_1^*+j^*j & 0 \\ 0 & \rho_0\rho_0^*+\rho_1^*\rho_1+jj^* \end{bmatrix}.$$

En réalité, on n'a introduit aucun élément nouveau au module $\mathcal{E}$ en rajoutant $\pi.E_0$ à E. De plus, $\tilde{D}$ est de la forme D+ A avec A l'opérateur borné auto-adjoint

$$\begin{bmatrix} 0 & j^* \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

et $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{D})$ est un représentant non-borné du même groupe de Kasparov que $(\mathcal{E},D)$. Finalement, si l'on désigne par $\nabla_{\pi.E_0}$ la connexion holomorphe associeé au fibré hermitien de rang fini $\pi.E_0$ de la façon que l'on a décrite au début, on déduit facilement que $\nabla+\nabla_{\pi.E_0}+i\tilde{D}$ est une super-connexion holomorphe selon notre définition, et donc que le couple $(\tilde{E},\tilde{D})$ est muni d'une structure holomorphe. Cette dernière super-connexion correspond à la super-connexion introduite dans [G-S]. On le considère comme étant moins commode, ne vérifiant pas la propriété supplémentaire 3) satisfaite par le représentant on a construit de $KK(\mathcal{A},\mathbb{C})$ et par la suite de $KK(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Un autre point à remarquer dans [G-S] est l'intervention d'un paramètre complexe. (Ce trait ne paraîtrait pas au niveau du foncteur bivariant de Kasparov qui ne mesure pas les variations dans les classes d'homotopie opératorielle.) Plus explicitement, on introduit une dépendence d'un paramètre complexe z dans le complexe élliptique à chaque point x de X:

$$0\to\Gamma(Y,E_{0,x})\xrightarrow{zj}\mathcal{F}_x^0\xrightarrow{z\bar{\partial}}\mathcal{F}_x^1\xrightarrow{z\bar{\partial}}\dots\xrightarrow{z\bar{\partial}}\mathcal{F}_x^n\to 0,$$

et pour la construction suivante le fibré gradué hilbertien sera défini sur $X\times\mathbb{C}$. A chaque $(x,z)\in X\times\mathbb{C}$ on à l'espace hilbertien $H_x=H_x^+\oplus H_x^-$ (ou pour l'exemple de [G-S], $\tilde{H}_x=\tilde{H}_x^+\oplus\tilde{H}_x^-$) et l'application impaire $D_{(x,z)}=z\rho+\bar{z}\rho^*$ (ou $\tilde{D}_{(x,z)}=z\rho+\bar{z}\rho^*+zj+\bar{z}j^*$). Il suffit maintenant de remarquer que la connexion $\tilde{\nabla}_X$ est remplacée par $\tilde{\nabla}^{0,1}_{X\times\mathbb{C}}=\bar{\partial}_X+\bar{\partial}_z$ avec $\bar{\partial}_z=\partial/\partial\bar{z}$, de la manière déjà décrite pour le produit de deux variétés, pour voir que les superconnexions correspondantes, avec $D_{(x,z)}$ au lieu de D_x et $\tilde{D}_{(x,z)}$ au lieu de $\tilde{D}_x$, restent holomorphes. Il s'agit donc d'une variation holomorphe d'une super-connexion holomorphe dans sa classe d'homotopie. Si une généralisation convenable du première problème de variation pour les applications harmoniques a comme solution dans le cas complexe une superconnexion holomorphe, c'est probable qu'une notion de variation holomorphe de cette super-connexion interviendrait dans le deuxième problème de variation.

Références.

[A-H-S] Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M. , *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry* , Proc. Royal Soc. London A, 362(1978), 425-461.

[B-G-S] Bismut J-M., Soulé Ch., Gillet H., *Analytic Torsion and Holomorphic Determinant Bundles . III. Quillen Metrics on Holomorphic Determinants,* Commun. Math. Phys. 115(1988), 301-351.

[G-S] Gillet H., Soulé Ch., *Direct images of Hermitian holomorphic bundles,* Bull. A.M.S. 15 (1986), 209-212.

[B-J] Baaj S., Julg P., *Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^* modules hilbertiens.* C.R. Acad. Sc. Paris t.296 (13 juin 1983).

[C] Connes A., *Non-Commutative Differential Geometry.* Publ. Math. I.H.E.S., No. 62 (1985).

[K] Kastler D., *Cyclic Cohomology.* Hermann, Paris, 1988.

[L] Lang S., *Introduction to Differentiable Manifolds.* Interscience, 1962.

[Q] Quillen D., *Superconnections and the Chern Character.* Topology 24, 89-95 (1985).