EINBETTUNGEN KOMMUTATIVER ALGEBRAISCHER GRUPPEN UND EINIGE IHRER EIGENSCHAFTEN

G. Faltings

Bergische Universität-
Gesamthochschule
FB 7 - Mathematik
Gaußstraße 20
5600 Wuppertal

G. Wüstholz

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-
Straße 26
5300 Bonn 3

MPI/SFB 84-3

0. Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist auf Veranlassung der Redaktion des Journals für reine und angewandte Mathematik entstanden und war ursprünglich gedacht als Appendix zu einer Arbeit des zweiten Autors über Transzendenzeigenschaften von Perioden elliptischer Integrale. Die ursprüngliche Intension, eine Reihe von Eigenschaften algebraischer Gruppen zusammenzustellen, die in der Transzendenztheorie nützlich und auch wichtig sind, hat sich nun letztlich doch erheblich ausgedehnt.

Seit einigen Jahren beschäftigt man sich in der Transzendenztheorie eingehend mit arithmetischen Eigenschaften der Exponentialabbildung algebraischer Gruppen. Für diese Untersuchungen ist es wichtig, diese quasiprojektiven algebraischen Varietäten in geeignete projektive Räume einzubetten und dann die Exponentialabbildung explizit anzugeben. Dies ist im Falle von abelschen Varietäten wohlbekannt und man erhält schöne projektive Einbettungen vermöge der bekannten Thetafunktionen. Im einfachsten Falle, nämlich für elliptische Kurven, wird man unwillkürlich auf die Weierstraß'sche elliptische Funktion $\wp(z)$ geführt. Analytisch gesehen ist eine elliptische Kurve E über $\mathbb{C}$ ein komplexer Torus $\mathbb{C}/\Lambda$ mit einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Diesen kann man explizit realisieren als exakte Sequenz

$$0 \to H_1(E,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\int} \mathrm{Lie}(E) = H^0(E,\Omega_E^1)^* \xrightarrow{\exp} H^0(E,\Omega_E^1)^*/\Lambda \to 0$$

mit $\Lambda = \mathrm{Ker}(\exp)$.

Algebraisch gesehen kann eine elliptische Kurve E über $\mathbb{C}$ in dem projektiven Raum $\mathbb{P}^2$ mit Koordinaten X_0, X_1, X_2 definiert werden durch die Weierstraß'sche Gleichung

$$X_0X_2^2 = 4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3$$

mit komplexen Koeffizienten g_2 und g_3. Setzt man $x = X_1/X_0$ und $y = X_2/X_0$, so wird durch

$$\omega = \frac{dx}{y}$$

eine invariante Differentialform auf der elliptischen Kurve gegeben. Deren Perioden ergeben ein Gitter Λ im Tangentialraum $T(E)$ (=LieE) von E im Punkte $(0,0,1)$. Zu diesem Gitter existiert in eindeutiger Weise die Weierstraß'sche elliptische Funktion $\wp(z) = \wp(z;\Lambda)$. Dies ist eine zweifach periodische Funktion mit Periodengitter Λ und Mittag-Leffler-Entwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] .$$

Ebenso können wir die Weierstraß'sche Sigma-Funktion $\sigma(z) = \sigma(z;\Lambda)$ bilden. Sie ist eine spezielle Thetafunktion und besitzt die Weierstraß'sche Produktdarstellung

$$\sigma(z) = z \prod_{0 \neq \omega \in \Lambda} (1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}} .$$

Identifizieren wir den Tangentialraum $T(E) = \mathrm{Lie}(E)$ mit $\mathbb{C}$, so wird die Exponentialabbildung der eingebetteten Lie-Gruppe $E \subset \mathbb{P}^2$

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda \to E$$

gegeben durch

$$z \mapsto (\sigma(z)^3, \sigma(z)^3\wp(z), \sigma(z)^3\wp'(z)) .$$

Aus der Differentialgleichung für die Weierstraß'sche elliptische Funktion folgt sofort, daß das Bild der eben beschriebenen Abbildung tatsächlich in E liegt.

Diese sehr explizite Konstruktion kann auch für beliebige zusammenhängende kommutative algebraische Gruppen durchgeführt werden. Ziel dieser Arbeit ist es, diese Konstruktion und einige ihrer Eigenschaften zu beschreiben.

Unsere Arbeit ist folgendermaßen organisiert: Zunächst ist bekannt (Satz von Chevalley), daß jede kommutative algebraische Gruppe G eine Gruppenerweiterung

$$0 \to L \to G \to A \to 0$$

einer abelschen Varietät A durch eine lineare Gruppe L ist. Im ersten Kapitel werden wir die Gruppe G kompaktifizieren zu einer G-Varietät $\overline{G}$. Dies ist eine projektive Varietät $\overline{G}$ mit einer Operation von G. Auf der projektiven Varietät $\overline{G}$ werden wir einen gewissen Divisoren D konstruieren, von dem wir nachweisen werden, daß er sehr ampel (siehe [Ha]) ist. Nach bekannten Sätzen (siehe ebenfalls [Ha]) folgt dann, daß das zugehörige lineare System $\mathcal{L}(D) = \Gamma(\overline{G}, \mathcal{O}_{\overline{G}}(D))$ eine projektive Einbettung $i: \overline{G} \to \mathbb{P}^n$ liefert. Diese werden wir genauer studieren (Kapitel II). Dies geht auf eine Idee von Serre zurück [Se3], die neuerlich auch von H. Lange [L] und F. Knop und H. Lange [K-L] aufgegriffen wurde.

Im dritten Kapitel werden wir die zu dieser Einbettung i gehörige Exponentialabbildung

$$\mathrm{Exp} = i \circ \exp$$

angeben. Hierbei ist exp die übliche Exponentialabbildung.

Dies werden wir im vierten Kapitel an einigen konkreten Beispielen verdeutlichen.

Im fünften Kapitel werden wir die Differentialformen erster, zweiter und dritter Art definieren. Sie stehen in engem Zusammenhang mit Gruppenerweiterungen.

Im sechsten und letzten Kapitel schließlich wird die verallgemeinerte Albanese-Varietät eingeführt werden. Sie ersetzt die bekannte verallgemeinerte Jacobi'sche Varietät von Kurven für höherdimensionale Varietäten. Wir werden dann zeigen, daß jede geschlossene holomorphe 1-Form auf einer glatten quasiprojektiven Varietät über einem Körper der Charakteristik 0 das Pull-back einer invarianten Differentialform auf einer verallgemeinerten Albanese Varietät ist.

Für geschlossene p-Formen $(p\geq 2)$ gilt dies im allgemeinen nicht.

I. Kompaktifizierung kommutativer algebraischer Gruppen

1. Gruppenerweiterungen

Im folgenden sei k ein beliebiger Körper und A eine abelsche Varietät definiert über k, L eine glatte zusammenhängende kommutative lineare Gruppe definiert über k. Wir setzen voraus, daß

$$L \cong \mathbb{G}_a^{l_1} \times \mathbb{G}_m^{l_2}$$

über k ist. Dies kann immer durch eine endliche Körpererweiterung von k erreicht werden.

Eine Erweiterung der abelschen Varietät A durch L ist eine algebraische Gruppe G und eine exakte Sequenz

$$0 \to L \to G \xrightarrow{p} A \to 0$$

von algebraischen Gruppen.

Die Menge der Isomorphieklassen von Erweiterungen von A durch L bildet eine Gruppe $\mathrm{Ext}(A,L)$, deren Struktur wohlbekannt ist (siehe [Se4]).

Um nun die Gruppe G aus $\mathrm{Ext}(A,L)$ projektiv einzubetten, ist es zweckmäßig, sie zuerst einmal zu kompaktifizieren. Um dies zu tun ist es zweckmäßig, die Gruppen $\mathbb{G}_a$ und $\mathbb{G}_m$ in eine geeignete projektive Varietät einzubetten. Dafür bietet sich der $\mathbb{P}^1_k$ an. Er ist mit einer invertierbaren Garbe $\mathcal{O}(1)$ versehen (siehe [Ha]), und die Automorphismen von $(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(1))$ sind $GL(2,k)$. Nun definieren wir die Einbettungen

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_a &\hookrightarrow GL(2,k) \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m &\hookrightarrow GL(2,k) \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad .$$

Auf diese Weise operiert L auf der projektiven Varietät $\bar{L} := (\mathbb{P}^1_k)^{l_1+l_2}$. Die Projektion von $\bar{L}$ auf den i-ten Faktoren bezeichnen wir mit pr_i $(1 \le i \le l_1+l_2)$. Zu jedem Exemplar von $\mathbb{P}^1_k$ gibt es einen ausgezeichneten Punkt ∞. Dann setzen wir

$$D_i = pr_i^{-1}(\infty) \qquad (1 \le i \le l_1+l_2) .$$

Weiter setzen wir

$$V_i = \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(\infty)) \qquad (1 \le i \le l_1+l_2) .$$

Dies ist ein 2-dimensionaler k-Vektorraum

$$V_i = k \cdot 1 + k \cdot T \quad .$$

Auf ihm operiert die algebraische Gruppe L vermöge

$$L \hookrightarrow GL(2,k)^{l_1+l_2} \xrightarrow{pr_i} GL(2,k) = \mathrm{End}(V_i) .$$

Sind $a_1, \ldots, a_{l_1+l_2}$ nicht-negative ganze Zahlen, so können wir den Divisoren

$$a_1 D_1 + \ldots + a_{l_1+l_2} D_{l_1+l_2}$$

auf $\bar{L}$ bilden.

Lemma 1. Es gibt einen L-linearen Isomorphismus

$$\Gamma(\bar{L}, \mathcal{O}(a_1 D_1 + \ldots + a_{l_1+l_2} D_{l_1+l_2})) \cong \bigotimes_{i=1}^{l_1+l_2} S^{a_i}(V_i) ,$$

wobei $S^r(W)$ für $r \ge 0$ die r-te symmetrische Potenz des k-Vektorraums W bezeichne.

<u>Beweis.</u> Nach der Formel von Künneth gilt

$$\Gamma(\bar{L},\mathcal{O}(a_1D_1 + \ldots + a_{l_1+l_2}D_{l_1+l_2})) \cong \bigotimes_{i=1}^{l_1+l_2} \Gamma(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}(a_i\cdot\infty)) .$$

Setzt man

$$V = \Gamma(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}(\infty)) ,$$

so gilt für $r \geq 0$

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}(r\cdot\infty)) \cong S^r(V) .$$

Setzt man dies oben ein, so erhält man sofort die Behauptung des Lemmas.

<u>Bemerkung.</u> Man erhält hieraus sofort die Dimension von $\Gamma(\bar{L},\mathcal{O}(a_1D_1 + \ldots + a_{l_1+l_2}D_{l_1+l_2}))$. Sie beträgt $(a_1+1)\ldots(a_{l_1+l_2}+1)$.

2. Gefaserte Objekte

Wir gehen aus von einer beliebigen algebraischen Gruppe L und einer algebraischen Varietät A . Ein prinzipales L-Bündel G über A ist eine algebraische Varietät G zusammen mit einem Morphismus $\pi : G \longrightarrow A$ und einer Operation $L \times G \longrightarrow G$ von L auf G , so daß der Morphismus π L-invariant ist, d.h.

$$\begin{tikzcd}
L \times G \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi\circ pr_2"'] & & G \arrow[dl, "\pi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, und G über A lokal trivial ist. Dies bedeutet, daß es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\varepsilon I}$ von A mit L-linearen Trivialisierungen

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\sim", "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & L \times U_i \arrow[dl, "pr_2"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

gibt. Über $U_i \cap U_i$ haben wir zwei Trivialisierungen φ_i und φ_j und erhalten durch

$$\tilde{g}_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1} \mid L \times (U_i \cap U_j)$$

einen L-linearen Automorphismus von $L \times (U_i \cap U_j)$.

Dieser hat die Gestalt

$$\tilde{g}_{ij}(l,u) = (g_{ij}(u)(l),u)$$

für einen L-linearen Automorphismus von L . Auf diese Weise wird jedem prinzipalen L-Bündel G über A ein Kozykel (g_{ij}) zugeordnet, welcher schließlich ein Element aus $H^1(A,L)$ definiert.

Ist M ein "algebraisches Objekt", auf dem die Gruppe L operiert, so kann man den Raum

$$(G \times M)/L \longrightarrow A$$

bilden. Dies ist ein Faserobject über A mit Faser M .

Beispiele:

1. Ist M eine algebraische Varietät X mit L-Operation, so ist $G \times X/L$ ein Faserbündel über $A = G/L$ mit Faser X. Die Abbildung $\pi: G \longrightarrow A$ induziert eine Projektion

$$p: (G \times X)/L \longrightarrow A ,$$

so daß

$$p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times X$$

ist. Für u in $U_i \cap U_j$ wird (u,x) mit $(u, g_{ij}(u) \cdot x)$ identifiziert.

2. Es sei M eine algebraische Varietät X mit L-Operation und $\mathfrak{F}$ ein äquivariantes L-Bündel auf X. Dann erhält man ein Faserbündel $G \times X/L$ und darauf ein Bündel

$$\mathfrak{G} = (G \times \mathfrak{F})/L ,$$

so daß

$$(p^{-1}(U_i), \mathfrak{G}|p^{-1}(U_i)) \xrightarrow{\sim} (U_i \times X, U_i \times \mathfrak{F})$$

ist.

3. Ist M ein k-Vektorraum E, auf dem L operiert, so erhält man eine kohärente Garbe $\mathcal{E}$ auf A in der folgenden Weise. Man bildet zunächste die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_i E \otimes_k \mathcal{O}_{U_i}$$

und identifiziert für $u \in U_i \cap U_j$ die Elemente

$$e \otimes f(u) \qquad \text{und} \qquad g_{ij}(u) e \otimes f(u) \ .$$

Dies ergibt eine Garbe $\mathcal{E}$ auf A mit

$$\mathcal{E}|U_i \xrightarrow{\sim} E \otimes_k \mathcal{O}_{U_i} \ .$$

Bemerkung. 3. ist ein Spezialfall von 2. (L operiert auf Punkt).

4. Die Beispiele 2. und 3. sind kompatibel, indem $R^j p_* \mathcal{G}$ das Vektorbündel zur Darstellung von L auf $H^j(X, \mathcal{F})$ ist.

3. Kompaktifizierungen

Es ist nun nicht schwierig, eine kommutative algebraische Gruppe G zu kompaktifizieren. Die Gruppe G ist Erweiterung einer abelschen Varietät A durch eine lineare Gruppe L. Dieser haben wir die projektive Varietät $\bar{L} = (\mathbb{P}_k^1)^{l_1 + l_2}$ zugeordnet, auf dem L operiert. Die Gruppe G ist ein prinzipales L-Bündel über A und daher können wir

$$\bar{G} = (G \times \bar{L})/L$$

bilden. Dann wird $\bar{G}$ ein Faserbündel

$$\bar{G} \xrightarrow{\bar{p}} A$$

über A mit Faser $\bar{L}$. Weiter ist $\bar{G}$ komplett und G in $\bar{G}$ eingebettet, so daß $\bar{G}$ die Kompaktifizierung von G ist. Die

Divisoren $D_1,\dots,D_{l_1+l_2}$ in $\overline{L}$ sind alle L-invariant und liften sich daher zu Divisoren $E_1,\dots,E_{l_1+l_2}$ auf $\overline{G}$. Es gilt

$$E_i = G \times D_i/L \qquad (1 \le i \le l_1 + l_2) .$$

II. Projektive Einbettungen: algebraische Theorie

1. Vektorbündel und Gruppenoperationen

Wir hatten gesehen, daß Operationen von Gruppen auf Vektorräumen Anlaß zu Vektorbündeln auf A geben. Wir betrachten zunächst die bereits beschriebenen Operationen von $\mathbb{G}_a$ auf $\mathbb{G}_m$ auf zweidimensionalen Vektorräumen V . Wir setzen $V = k\cdot 1 \oplus kT$. Dann operiert $\mathbb{G}_a$ auf V vermöge der Darstellung

$$\rho_a : \mathbb{G}_a \longrightarrow GL(V)$$

die durch

$$\rho_a(x)(1) = 1$$

$$\rho_a(x)(T) = T + x \cdot 1$$

gegeben wird.

Ebenso erhalten wir eine Darstellung

$$\rho_m : \mathbb{G}_m \longrightarrow GL(V)$$

durch

$$\rho_m(x)(1) = 1$$

$$\rho_m(x)(T) = x \cdot T \ .$$

$W = k \cdot 1 \subset V$ ist $\mathbb{G}_a$-stabil. Dies liefert eine exakte Sequenz von $\mathbb{G}_a$-Moduln (mit trivialer $\mathbb{G}_a$-Operation auf W und V/W)

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow V/W \longrightarrow 0 \ .$$

Wenden wir die Überlegungen aus dem vorigen Kapitel an, so erhalten wir eine exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_W \longrightarrow \mathcal{E}_V \longrightarrow \mathcal{E}_{V/W} \longrightarrow 0 \ .$$

Weil $\mathbb{G}_a$ auf W und V/W trivial operiert, gilt $\mathcal{E}_V \cong \mathcal{O}_A$ und $\mathcal{E}_{V/W} \cong \mathcal{O}_A$.

Deswegen ist der Sequenz (1) von $\mathbb{G}_a$-Vektorbündeln die exakte Sequenz

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

zugeordnet, wobei $\mathcal{E} = \mathcal{E}_V$ gesetzt wurde und $\mathcal{E}$ ist in $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_A) \cong H^1(A, \mathcal{O}_A)$ (siehe [Ha]).

Wir betrachten nun die Gruppe $\mathbb{G}_m$. Hier sind $\mathbb{G}_m$-stabile Untervektorräume gegeben durch

$$W_1 = k \cdot 1 \ , \quad W_2 = k \cdot T \ ,$$

wie man leicht sieht. Die Operation von $\mathbb{G}_m$ auf W_1 ist trivial und die auf W_2 ist die Identität. Man erhält damit eine Zerlegung von $\mathcal{E}_V$ als eine direkte Summe

$$\mathcal{E}_V = \mathcal{E}_{W_1} \oplus \mathcal{E}_{W_2} ,$$

und es ist $\mathcal{E}_{W_1} \cong \mathcal{O}_A$. Man erhält somit eine Zerlegung

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L} . \tag{3}$$

Hierbei ist $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf A . Dieses liegt sogar in $\mathrm{Pic}^\circ A$, der Untergruppe der Geradenbündel $\mathcal{L}$ von A mit $c_1(\mathcal{L}) = 0$. Hier ist $c_1(\mathcal{L})$ die erste Chern'sche Klasse von $\mathcal{L}$. Zusammenfassend haben wir folgendes erhalten:

<u>Proposition 1.</u> (i) Der Operation von $\mathbb{G}_a$ auf V entspricht in eindeutiger Weise eine Klasse von Erweiterungen (2) von $\mathcal{O}_A$ durch $\mathcal{O}_A$. Dies ist ein Element aus $\mathrm{Ext}^1(A;\mathcal{O}_A,\mathcal{O}_A) = H^1(A,\mathcal{O}_A)$.

(ii) Der Operation von $\mathbb{G}_m$ auf V entspricht in eindeutiger Weise ein Element aus $\mathrm{Pic}^\circ(A) \cong \check{A} \cong \mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m)$.

Dies entspricht den Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_a) \cong H^1(A,\mathcal{O}_A), \ \mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Pic}^\circ(A) .$$

Wie wir bereits gesehen haben, operiert die Gruppe L auf dem Vektorraum

$$\Gamma(\bar{L},\mathcal{O}(a_1D_1 + \ldots + a_{l_1+l_2}D_{l_1+l_2})) \cong \bigotimes_{i=1}^{l_1+l_2} S^{a_i}(V_i) .$$

Wir setzen nun

$$F := \bigotimes_{i=1}^{l_1+l_2} S^{a_i}(V_i) .$$

Hierauf haben wir eine L-Operation und wir erhalten infolgedessen ein Bündel $\mathcal{F}$ auf A . Es läßt sich schreiben als

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^{l_1+l_2} S^{a_i}(\mathcal{E}_i) ,$$

wobei $\mathcal{E}_i$ das zum i-ten Faktoren gehörige, soeben beschriebene Bündel ist. Es gibt also exakte Sequenzen

$$0 \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{E}_i \to \mathcal{O}_A \to 0 \qquad (1 \leq i \leq l_1)$$

und weiter gilt

$$\mathcal{E}_{l_1+i} = \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{L}_i \ , \mathcal{L}_i \in \mathrm{Pic}^\circ(A) \ \ (1 \leq i \leq l_2) \ .$$

Jede der Garben $S^{a_i}(\mathcal{E}_i)$ läßt eine Filtrierung zu, deren sukzessive Quotienten in $\mathrm{Pic}^\circ A$ liegen. Hieraus erhält man eine Filtrierung von

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \ldots \supset \mathcal{F}^r \supset \mathcal{F}^{r+1} = 0$$

mit $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \in \mathrm{Pic}^\circ A$ für $0 \leq p \leq r$.

2. Projektive Einbettungen von $\overline{G}$

Um die vollständige Varietät $\overline{G}$ projektiv einzubetten, benötigen wir einen sehr amplen Divisoren oder äquivalent dazu ein sehr amples Geradenbündel. Dies wird uns in dem folgenden Satz geliefert.

<u>Satz 1.</u> (i) Sei $\mathcal{L}$ ein amples Geradenbündel auf A und $a_1,\ldots,a_{l_1+l_2}$ seien positiv. Dann ist

$$\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)$$

ampel auf $\overline{G}$.

(ii) Ist darüberhinaus $\mathcal{L}$ ein sehr amples Geradenbündel auf A , so ist

$$\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)$$

sehr ampel auf $\overline{G}$.

Den Beweis dieses Satzes wollen wir noch zurückstellen und stattdessen eine später nützliche Proposition beweisen. Dazu betrachten wir das Bündel $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)$. Nach den früheren Überlegungen gilt für sein direktes Bild unter $\overline{p}$ die Beziehung

$$\overline{p}_*(\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)) = \mathcal{F} .$$

<u>Proposition 2.</u> Es gilt für die globalen Schnitte

$$\Gamma(\overline{G},\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)) \cong \Gamma(A,\mathcal{L}\otimes\mathcal{F}) .$$

<u>Beweis.</u> Es gilt nach Definition der direkten Bildgarbe

$$\Gamma(\overline{G},\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)) = \Gamma(A,\overline{p}_*(\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i))) .$$

Nach der Projektionsformel (siehe [Ha], II, Ex. 5.2(d)) gilt weiter

$$\overline{p}_*(\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_iE_i)) = \mathcal{L} \otimes \overline{p}_*(\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_iE_i)) .$$

Hieraus folgt dann sofort die behauptete Beziehung.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir das folgende

Lemma 2. Es sei $\mathcal{F}$ ein Vektorbündel auf A, so daß es eine Filtrierung

$$0 = \mathcal{F}_{r+1} \subset \mathcal{F}_r \subset \ldots \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$$

gibt mit $\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{p+1} \in \mathrm{Pic}^\circ(A)$ für $0 \leq p \leq r$. Ist dann $\mathcal{L}$ ein sehr amples Bündel auf A, so ist $\mathcal{M} = q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1)$ sehr ampel auf $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, wobei

$$q : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow A$$

die kanonische Projektion ist.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß k algebraische abgeschlossen ist. Für $u,v \in A$ sei dann $A_{\{u,v\}}$ das Unterschema von A mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_A/\mathfrak{m}_u \cdot \mathfrak{m}_v$. Hierbei ist $\mathfrak{m}_u$ (bzw. $\mathfrak{m}_v$) die Idealgarbe des Punktes u (bzw. v). Falls $u \neq v$ ist, so besteht $A_{\{u,v\}} = \{u\} \cup \{v\}$ aus zwei Punkten. Ist $u=v$, so ist $A_{\{u,v\}} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{A,u}/\mathfrak{m}_u^2)$. Die Garbe $\mathcal{L}$ ist dann sehr ampel (siehe [Ha], II.7), falls die Abbildung

$$\Gamma(A,\mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(A_{\{u,v\}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}})$$

surjektiv ist für alle u,v. Dies wollen wir nun benutzen.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{J}_{u,v} \subset \mathcal{O}_A$ die Idealgarbe von $A_{\{u,v\}}$, so folgt aus der exakten Sequenz von Garben

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{J}_{u,v} \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A/\mathcal{J}_{u,v} \longrightarrow 0$$

nach Tensorieren mit $\mathcal{L}$ und unter Berücksichtigung von

$$\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_{u,v} \cong \mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}}$$

zunächst die exakte Sequenz

$$\Gamma(A,\mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(A,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}}) \rightarrow H^1(A,\mathcal{L}\otimes\mathcal{J}_{u,v}) \rightarrow H^1(A,\mathcal{L}) .$$

Da $H^1(A,\mathcal{L}) = 0$ ist (siehe [Mu], S. 150) und $\mathcal{L}$ sehr ampel, also

$$\Gamma(A,\mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(A,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}}) \rightarrow 0$$

exakt ist, erhalten wir schließlich, daß

$$H^1(A,\mathcal{L}\otimes\mathcal{J}_{u,v}) = 0$$

für alle $u,v \in A$.

Ist $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}^{\circ}(A)$, so existiert ein $x \in A$, so daß

$$\mathcal{N} \cong T_x^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1}$$

ist, wobei T_x die Translation mit $x \in A$ bedeutet (siehe [Mu], p.77). Daher ist $\mathcal{N}\otimes\mathcal{L}$ ebenfalls sehr ampel. Es folgt, daß

$$H^1(A,\mathcal{L}\otimes\mathcal{N}\otimes\mathcal{J}_{u,v}) = 0$$

ist für alle u,v aus A und $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}^{\circ}(A)$.

Benutzt man dies und die Tatsache, daß das Bündel $\mathcal{F}$ eine Filtrierung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{F}_r \supset \mathcal{F}_{r+1} = 0$$

mit

$$\mathcal{N}_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{p+1} \in \mathrm{Pic}^\circ(A) \qquad (0 \leq p \leq r) ,$$

so erhält man durch Induktion

$$H^1(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{J}_{u,v}) = 0$$

für alle $u, v \in A$. Man bildet hierzu lediglich die exakte Kohomologiesequenz zur exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}_{p+1} \to \mathcal{F}_p \to \mathcal{N}_p \to 0 ,$$

beachtet, daß nach Induktionsvoraussetzungen die Gruppe $H^1(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_{p+1} \otimes \mathcal{J}_{u,v})$ verschwindet ebenso wie die Gruppe $H^1(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{N}_p \otimes \mathcal{J}_{u,v})$, und erhält dann $H^1(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_p \otimes \mathcal{J}_{u,v}) = 0$.

Nun tensorieren wir die exakte Sequenz (4) mit der kohärenten Garbe $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$ und bilden die dazugehörige exakte Kohomologiesequenz. Aus dem Verschwinden von $H^1(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{J}_{u,v})$ folgt nun die Surjektivität von

$$(5) \qquad \Gamma(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}})$$

für alle u, v aus A .

Wir bilden nun das projektive Raumbündel

$$Y = \mathbb{P}(\mathfrak{F})$$

und erhalten wie vorher einen kanonischen Morphismus $q : Y \to A$. Dann wird das Unterschema $Y_{\{\tilde{u},\tilde{v}\}}$ von Y für Punkte $\tilde{u},\tilde{v}$ aus Y wie vorhin erklärt. Wir setzen noch $u = q(\tilde{u})$ und $v = q(\tilde{v})$. Dann ist wie eben die Garbe $q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1)$ mit $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{F})}(1)$ sehr ampel auf Y genau dann, wenn für alle $\tilde{u},\tilde{v}$ aus Y die Abbildung

$$\Gamma(A,\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{L}) = \Gamma(Y,q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1)) \to \Gamma(Y_{\{\tilde{u},\tilde{v}\}}, q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_{Y_{\{\tilde{u},\tilde{v}\}}})$$

surjektiv ist.

Nun gibt es aber ein Diagramm von Injektionen

$$Y_{\{\tilde{u},\tilde{v}\}} \subseteq \tilde{Y} = \mathbb{P}(\mathfrak{F}\otimes\mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}}) \subseteq \mathbb{P}(\mathfrak{F}) .$$

Aus der Surjektivität von (5) folgt nun wegen

$$\Gamma(A,\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{F}) = \Gamma(Y,q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1))$$

und

$$\Gamma(A_{\{u,v\}}, \mathfrak{L}\otimes\mathfrak{F}\otimes\mathcal{O}_{A_{\{u,v\}}}) = \Gamma(\tilde{Y}, q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$$

die Surjektivität von

$$\Gamma(Y,q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Y}, q^*(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$$

für alle $\tilde{u},\tilde{v}$ aus Y. Es genügt deswegen zu zeigen, daß die Abbildung

$$\Gamma(\tilde{Y}, q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \rightarrow \Gamma(Y_{\{u,v\}}, q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \times \mathcal{O}_{Y_{\{u,v\}}})$$

surjektiv ist für alle $\tilde{u},\tilde{v}$ aus Y . Dies ist der Fall, wenn die Garbe $q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ sehr ampel ist auf $\tilde{Y}$. Da das Schema $A_{\{u,v\}}$ affin und endlich ist, ist die Garbe $\mathcal{L}|_{A_{\{u,v\}}}$ trivial und

$$q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(1) \ .$$

Die Garbe $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(1)$ ist jedoch trivialerweise sehr ampel, woraus dann die Behauptung des Lemmas folgt.

Der Beweis des Satzes ist nun sehr einfach zu führen. Zunächst beachtet man, daß $\mathcal{F}$ eine Filtrierung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \ldots \supset \mathcal{F}^r \supset \mathcal{F}^{r+1} = 0$$

dar im Lemma vorausgesetzten Form besitzt. Weiter läßt sich $\bar{G}$ schreiben als das Faserprodukt über A der projektiven Raumbündel $\mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$, $i=1,\ldots,l_1+l_2$, also

$$\bar{G} = \mathbb{P}(\mathcal{E}_1) \times_A \cdots \times_A \mathbb{P}(\mathcal{E}_{l_1+l_2}) \ .$$

Dieses Produkt betten wir weiter vermöge der Segre-Einbettung in das projektive Raumbündel $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ ein und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bar{G} = \mathbb{P}(\mathcal{E}_1) \times_A \cdots \times_A \mathbb{P}(\mathcal{E}_{l_1+l_2}) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & \mathbb{P}(\mathcal{F}) \arrow[d, "q"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

mit $i^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i)$. Es ist

$$\Gamma(\overline{G},\overline{p}^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{l_1+l_2} a_i E_i) \cong \Gamma(\mathbb{P}(\mathcal{F}),q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1)) ,$$

und $q^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}(1)$ ist sehr ampel auf $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ nach dem Lemma. Damit ist der Satz bewiesen.

III. Projektive Einbettungen: analytische Theorie

1. Allgemeine Theorie, Thetafunktionen

In diesem Abschnitt werden wir eine explizite Beschreibung mittels Thetafunktionen der Schnitte der im letzten Abschnitt betrachteten Garben vornehmen. Dazu sei A eine abelsche Varietät über $\mathbb{C}$ und $A = V/U$ gesetzt mit $V \cong \mathbb{C}^g$, $g = \dim A$ und $U \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Dann gilt für die Gruppe $\operatorname{Pic} A$ der Geradenbündel auf A die folgende Beschreibung (siehe [Mu], p. 20).

Satz (Appel-Humbert). Jedes Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf A ist isomorph zu einem Bündel $\mathcal{L}(H,\alpha)$ für ein eindeutig bestimmtes Paar (H,α) gegeben durch eine Hermite'sche Form $H : V \times V \to \mathbb{C}$, deren Imaginärteil $E = \operatorname{im} H$

$$E(U \times U) \subseteq \mathbb{Z}$$

erfüllt, und einer Abbildung $\alpha : U \to U(1) = \{z; |z|=1\} \subset \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(u_1+u_2) = e^{i\pi E(u_1,u_2)}\alpha(u_1)\alpha(u_2) .$$

Das Paar (H,α) entspricht den Automorphiefaktoren

$$e_u(z) = \alpha(u)e^{\pi H(z,u) + \frac{1}{2}\pi H(u,u)} .$$

Das Geradenbündel $\mathcal{L}(H,\alpha)$ ist der Quotient von $\mathbb{C} \times V$ nach der Aktion von U , welche durch

$$\phi_u(\lambda,z) = (e_u(z) \cdot \lambda, z+u)$$

für $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $z \in V$ gegeben wird.

Die abelsche Varietät A sei von nun an prinzipal polarisiert, d.h. H sei positiv difinit , E auf $U \times U$ nicht ausgeartet und $\det(E) = 1$. Unter diesen Voraussetzungen ist das Bündel $\mathcal{L}(H,\alpha)$ ampel (Satz von Lefschetz, siehe [Mu], p. 29).

Da E eine nicht ausgeartete symplektische Form ist, können wir eine Basis $u_1, \ldots, u_{2g}$ von U so finden, daß die Matrix von E die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ besitzt, wobei I die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. Die Vektoren $u_1, \ldots, u_g$ bilden eine Basis von V , bezüglich derer die Periodenmatrix die Gestalt

$$\Omega = (I,Z)$$

besitzt mit einer $n \times n$ -Matrix Z , die wir in der Form

$$Z = X+iY$$

mit einer postiv definiten Matrix Y schreiben können.

Bezüglich unserer gewählten Basis können wir H berechnen und finden

$$H(z,w) = {}^t z\, Y^{-1}\, \overline{w}$$

für

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_g \end{pmatrix} , \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_g \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g .$$

Dies ist eine hermite'sche Form , deren Imaginärteil E auf den Spaltenvektoren von Ω ganzzahlige Werte annimmt. Der Raum $\Gamma(A,\mathcal{L}(H,\alpha))$ wird dann erzeugt von der Riemann'schen Thetafuntkion

$$\vartheta(z;Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi {}^tnZn} e^{2\pi i {}^tnz} ,$$

welche die Funtionalgleichungen

$$\vartheta(z+m;Z) = \vartheta(z;Z) ,$$
$$\vartheta(z+Zm;Z) = e^{-i\pi {}^tmZm} e^{-2\pi i {}^tmz} \vartheta(z;Z)$$

besitzt für $m \in \mathbb{Z}^g$. Dies entspricht dem Automorphiefaktoren

$$e_m(z) = 1$$
$$e_{Zm}(z) = e^{-i\pi {}^tmZm} e^{-2\pi i {}^tmz} .$$

Für ganze Zahlen $d > 0$ betrachten wir nun den Raum $\Gamma(A,\mathcal{L}^{\otimes d})$. Er wird erzeugt von den Funktionen

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(z;Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi {}^tn(Z/d)n} e^{2\pi i {}^tna} e^{2\pi i {}^tnz}$$

für $a \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g$. Diese Thetafunktionen erfüllen die Funktionalgleichungen

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(z+m;Z) = \vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(z;Z) ,$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(z+Zm;Z) = e^{-i\pi d {}^tmZm} e^{-2\pi i d {}^tmz} \vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(z;Z) .$$

Es ist einfach nachzuweisen, daß sie eine Basis von $\Gamma(A,\mathcal{L}^{\otimes d})$ bilden und dieser Vektorraum somit die Dimension d^g besitzt.

2. Erweiterungen abelscher Varietäten durch $\mathbb{G}_a$

Die Erweiterungen abelscher Varietäten durch $\mathbb{G}_a$ werden bekanntlich klassifiziert durch $\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_a)$. Diese Gruppe ist, wie man weiß, isomorph zu $H^1(A,\mathcal{O}_A)$ ([Se4]) . Diese Gruppe wollen wir näher studieren. Dazu gehen wir aus von der exakten Sequenz

$$0 \to H^0(A,\Omega_A^1) \to H^1(A,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(A,\mathcal{O}_A) \to 0$$

(siehe [Mu]). Nun ist auf kanonische Weise

$$H^0(A,\Omega_A^1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$$

und

$$H^1(A,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U,\mathbb{C}) \ .$$

Ist nun $\lambda : U \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, so gehört dazu das Vektorbündel $\mathcal{E}_\lambda$ vom Rang 2 über A

$$0 \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}_A \to 0$$

mit den Automorphiefaktoren

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad u \in U \ .$$

Ist $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$, so ist

$$f_1(z) = \begin{pmatrix} \lambda(z) \\ 1 \end{pmatrix} , \ f_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathcal{E}_\lambda$ und deswegen $\mathcal{E}_\lambda \cong \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{O}_A$, also die triviale Erweiterung. In der Basis des letzten Abschnitts können wir daher $H^1(A,\mathcal{O}_A)$ identifizieren mit

$$H^1(A,\mathcal{O}_A) \cong \{\lambda \in \mathrm{Hom}(U,\mathbb{C}),\ \lambda(u_i) = 0, 1 \leq i \leq g\}.$$

Setzen wir nun noch

$$\lambda(Zm) = \sum_{j=1}^{g} \lambda_j m_j = {}^t\lambda m\ ,$$

so erhält man die Automorphiefaktoren

$$e_m(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{Zm}(z) = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\lambda m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\pi d\ {}^tmZm}\, e^{-2\pi i d\, {}^tmz}$$

Eine Basis für die globalen Schnitte $\Gamma(A,\mathcal{E}_\lambda \times \mathcal{L}^d)$ von $\mathcal{E}_\lambda \times \mathcal{L}^d$ wird nun gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \lambda_j \frac{\partial\vartheta}{\partial z_j}\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} .$$

Zusammenfassend erhalten wir folgende eplizite Beschreibung der Erweiterungen von A durch $\mathbb{G}_a$. Wählt man ein Element aus $H^1(A, {}_A)$, so entspricht diesem in eindeutiger Weise ein Element $\lambda \in \mathrm{Hom}(U,\mathbb{C})$ mit $\lambda(\mathbb{Z}^g) = 0$. Zu diesem λ gehört die Gruppenerweiterung $G_\lambda = (V \times \mathbb{C})/(\mathrm{id},-\lambda)(U)$ aus $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{G}_a)$ wie bereits geschrieben. Es gilt dann der folgende

Satz 2. Eine Basis für den Vektorraum $\Gamma(\bar{G}_\lambda, \bar{p}^*(\mathcal{L}^d) \otimes \mathcal{O}(E))$ wird gegeben durch die $2d^g$ Funktionen

$$\vartheta\left[{a \atop 0}\right](z;Z) \;,$$

$$\vartheta\left[{a \atop 0}\right](z;Z)\,t - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \lambda_j \frac{\partial}{\partial z_j} \vartheta\left[{a \atop 0}\right](z;Z)$$

für $a \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g$, $z \in \mathbb{C}^d$, $t \in \mathbb{C}$.

3. Erweiterungen abelscher Varietäten durch $\mathbb{G}_m$.

In diesem Fall haben wir es mit $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m)$ zu tun. Diese Gruppe ist bekanntlich isomorph zu $\mathrm{Pic}^\circ(A)$. Nach [Mu], p. 84, ist ein Element aus $\mathrm{Pic}^\circ(A)$ gleich einem Bündel $\mathcal{L}(0, \gamma_l)$ für ein $l \in V$ und mit

$$\gamma_l(u) = e^{2\pi i E(l,u)} \;, \quad u \in U \;.$$

Hieraus sieht man übrigens, daß $\gamma_l = \gamma_{l'}$, ist, falls $l \equiv l'$ mod U ist. Zu jedem γ_l gehört das Vektorbündel vom Rang 2

$$0 \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{E}_l \to \mathcal{O}_A \to 0$$

auf A . Es besitzt die Automorphiefaktoren

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_l(u) \end{pmatrix} \;.$$

Wir berechnen nun eine Basis von $\Gamma(A, \mathcal{E}_l \otimes \mathcal{L}^d)$. Dazu gehen wir aus von der $g \times 2g$ -Matrix (I, Z) . Ihre Spaltenvektoren erzeugen über

$\mathbb{R}$ den Vektorraum $\mathbb{C}^g$. Deswegen können wir jedes $x \in \mathbb{C}^g$ schreiben als $x = x' + Zx''$ mit $x', x'' \in \mathbb{R}^g$. Man verifiziert nun leicht, daß die schiefsymmetrische Form $E(x,y)$ dann die Gestalt

$$E(x,y) = {}^t x'' y' - {}^t x' y''$$

besitzt.

Wir definieren dann die Funktionen

$$F_1[{}^a_0](z,Z) = \frac{\vartheta[{}^a_0](z+1;Z)}{\vartheta[{}^a_0](z;Z)}\, e^{2\pi i\, {}^t z 1''} .$$

Diese Funktionen genügen, wie man leicht verifiziert, der Funktionalgleichung

$$F_1[{}^a_0](z+m;Z) = F_1[{}^a_0](z;Z)\; e^{2\pi i E(1,m)}$$

für $m = m' + Zm''$. Eine Basis von $\Gamma(A, \xi_1 \otimes \mathcal{L}^d)$ wird daher gegeben durch die folgenden Funktionen:

$$\begin{pmatrix} \vartheta[{}^a_0](z;Z) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta[{}^a_0](z;Z)\; F_1[{}^a_0](z;Z) \end{pmatrix} .$$

Man rechnet wiederum leicht nach, daß dieses Mal die Automorphiefaktoren durch

$$e_{m'+Zm''}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1(m'+Zm'') \end{pmatrix} e^{-i\pi\, {}^t m'' Z m'} e^{-2\pi i d\, {}^t m'' z}$$

gegeben werden. Bezeichnen wir mit G_1 die zu dem Element $\mathcal{L}(0,\gamma_1)$, $1 \in V$, gehörenden Erweiterungen von A durch $\mathbb{G}_m$ aus

$\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m)$, so ist $G_\ell \cong V \times \mathbb{C}^*/(\mathrm{id},-\gamma_\ell)(U)$ und wir haben das folgende Rsultat erhalten.

Satz 3. Eine Basis von $\Gamma(\overline{G}_1,\overline{p}^*(\mathcal{L}^d)\otimes\mathcal{O}(E))$ wird gegeben durch die Funktionen

$$\vartheta\left[{a \atop 0}\right](z;Z)\ ,$$

$$\vartheta\left[{a \atop 0}\right](z;Z)F_1\left[{a \atop 0}\right](z;Z)e^t$$

für $a \in (\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g$, $z \in \mathbb{C}^g$, $t \in \mathbb{C}$.

IV. Einige Beispiele

Wir werden nun einige konkrete Beispiele geben, in denen wir explizit die Erweiterungen angeben, die wir bisher konstruiert haben. Dabei werden wir es mit elliptischen Kurven zu tun haben. Hier stehen uns dafür die klassischen Funktionen $\wp(z)$, $\zeta(z)$ und $\sigma(z)$ zur Verfügung.

Beispiel 1. Sei E eine elliptische Kurve und Λ das Periodengitter, d.h. $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$, $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$. Wir haben gesehen, daß $\mathrm{Ext}^1(E,\mathbb{G}_a)$ mit dem Raum $\{\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{C});\ \lambda(\omega_1)=0\}$ identifiziert werden kann und gezeigt, wie zu jedem solchen λ eine Erweiterung aus $\mathrm{Ext}^1(E,\mathbb{G}_a)$ konstruiert werden kann. Die zum Gitter Λ gehörende Weierstraß'schen Funktionen seien $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$.

Mit ihnen bilden wir die Funktionen

$$F_1(z,t) = t + \tfrac{1}{3}\lambda(\omega_2)\zeta(z) \;,$$

$$F_2(z,t) = t + \tfrac{1}{3}\lambda(\omega_2)(\zeta(z)+3\wp'(z))$$

$$F_3(z,t) = t + \tfrac{1}{3}\lambda(\omega_2)(\zeta(z)+18\wp^2-\tfrac{3}{2}g_2) \;.$$

G sei nun die zu λ gehörige Erweiterung. Diese kann dann in den projektiven Raum $\mathbb{P}^5$ eingebettet werden und die zugehörige Exponentialabbildung wird gegeben durch

$$(z,t) \mapsto (\sigma^3(z),\ \sigma^3(z)\wp(z),\ \sigma^3(z)\wp'(z),\ \sigma^3(z)F_1(z,t),$$
$$\sigma^3(z)F_2(z,t),\ \sigma^3(z)F_3(z,t)) \;.$$

In der Arbeit [Wü2] des zweiten Autors tritt eine Erweiterung von einem Produkt von elliptischen Kurven durch $\mathbb{G}_a$ auf. Hier die völlig explizite Angabe der Einbettung und Exponentialabbildung:

<u>Beispiel 2</u>. $E_1,\ldots,E_n$ seien elliptische Kurven, $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ die dazugehörigen Gitter, $\Lambda_i = \mathbb{Z}\omega_{1,i} + \mathbb{Z}\omega_{2,i}$ und $G \in \mathrm{Ext}(E_1 \times \ldots \times E_n; \mathbb{G}_a)$. Die Funktionen $\wp_i$, ζ_i, σ_i seien wie oben erklärt. Dann setzen wir für ganz $\nu_{i,j}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le 3)$

$$\nu = (\nu_{1,1},\nu_{2,1},\nu_{3,1};\ldots;\nu_{1,n},\nu_{2,n},\nu_{3,n})$$

mit

$$\nu_{1,i} + \nu_{2,i} + \nu_{3,i} = 1 \quad \text{und} \quad \nu_{i,j} \ge 0$$

$$\theta_\nu(z_1,\ldots,z_n) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(z_i)^3 \wp_i(z_i)^{\nu_{2,i}} \wp_i'(z_i)^{\nu_{3,i}}$$

und

$$F_\nu(z_1,\ldots,z_n t) = t + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(w_{2,i})\zeta_i(z_i)^{\nu_{1,i}}(\zeta_i(z_i) + 3\wp_i'(z_i))^{\nu_{2,i}} \times$$

$$\times\ (\zeta_i(z_i) + 18\wp_i^2 - \tfrac{3}{2}g_{2,i})^{\nu_{3,i}} \ .$$

Dann wird die Einbettung von G in den $\mathbb{P}^N$ für $N=2\cdot 3^n-1$ gegeben durch

$$(z_1,\ldots,z_n,t) \longmapsto (\ldots,\theta_\nu,\ldots,\ldots,\theta_\nu F_\nu,\ldots) \ .$$

Das nächste Beispiel betrifft Erweiterungen von elliptischen Kurven durch $\mathbb{G}_m$. Sie tauchen in [Wü 1] auf.

<u>Beispiel 3.</u> Wiederum sei E eine elliptische Kurve mit den üblichen Bezeichnungen. Wir setzen

$$E(w,z) = \frac{1}{2\pi i}(\zeta(w)z - w\zeta(z)) \ .$$

Dies ist eine schiefsymmetrische Form auf $\Lambda \times \Lambda$ mit ganzzahligen Werten, falls wir für ω aus Λ definieren

$$\zeta(\omega) = \zeta(z+\omega) - \zeta(z) \quad , \quad z\in\mathbb{C}-\Lambda \ .$$

Zu den Elementen $u_1,\ldots,u_n$ aus $E \cong \mathrm{Pic}^\circ(E) = \mathrm{Ext}^1(E,\mathbb{G}_m)$ gehören die Automorphiefaktoren

$$\gamma_{u_i}(\omega) = e^{2\pi i\ E(u_i,\omega)} \qquad (1\le i\le n) \ .$$

Die hierzugehörige Erweiterung von E durch $\mathbb{C}_m^n$ wird in den $\mathbb{P}^{3(n+1)-1}$ eingebettet durch

$$(z,t_1,\dots,t_n) \mapsto (\sigma^{n+3}, \sigma^{n+3}\wp, \sigma^{n+3}\wp', \dots, \sigma^{n+3}G_\nu, \sigma^{n+3}\wp G_\nu, \sigma^{n+3}\wp' G_\nu, \dots) \;,$$

wobei für Funktionen $\nu : \{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$ und mit

$$F_{u_i}(z) = \frac{\sigma(z+u_i)}{\sigma(z)\sigma(u_i)} e^{\zeta(u_i)z} \qquad (i=1,\dots,n)$$

die Funktionen G_ν definiert sind durch

$$G_\nu(z,t_1,\dots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} (F_{u_i}(z)e^{t_i})^{\nu(i)} \;.$$

V. Algebraische Differentiale erster, zweiter und dritter Art

In diesem Kapitel sei k ein Körper der Charakteristik Null und X/k eine projektive glatte Varietät. Hierauf existiert der Komplex

$$\Omega_X^{\cdot} : \mathcal{O}_X \to \Omega_X^1 \to \Omega_X^2 \to \dots.$$

der Garben holomorpher Differentiale. Wir definieren den Komplex $\mathcal{K}_X^{\cdot}$ als

$$\mathcal{K}_X^{\cdot} : \mathcal{M}_X \to \Omega_X^1 + d\mathcal{M}_X \to \Omega_X^2 \to \dots \;.$$

Hier ist $\mathcal{M}_X$ die Garbe der Keime meromorpher Funktionen, und es gilt

$$\Omega_X^\bullet \hookrightarrow \mathcal{K}_X^\bullet \quad .$$

Diese Injektion ist ein Quasi-Isomorphismus. Um dies zu sehen, betrachtet man den Quotientenkomplex und zeigt, daß

$$\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X \longrightarrow d\mathcal{M}_X/d\mathcal{M}_X \cap \Omega_X^1$$

ein Isomorphismus ist. Die Surjektivität ist einfach und zum Nachweis der Injektivität berücksichtigt man, daß eine meromorphe Funktion f regulär ist, wenn df regulär ist.

Wir definieren nun den k-Vektorraum der Differentiale erster Art auf X als den Vektorraum $H^0(X,\Omega_X^1)$ der globalen holomorphen Differentialformen. Die Differentiale zweiter Art werden definiert als

$$\mathcal{D}_2 = \Gamma(X,\Omega^1 + d\mathcal{M}_X) \,/\, d\Gamma(X,\mathcal{M}_X) \quad .$$

Dies sind demnach die globalen meromorphen 1-Formen, welche sich lokal (d.h. in der Zariski-Topologie) schreiben lassen als $\eta + dg$ mit regulärem η und rationalem g. Sie sind automatisch geschlossen. Wir werden nun einen Isomorphismus zwischen $H_{DR}^1(X)$ und $\mathcal{D}_2$ mit Hilfe einer Spektralsequenz angeben. Dazu erinnern wir an die Hodge-Filtrierung F. Ist $\mathcal{K}^\bullet$ ein beliebiger Komplex

$$\mathcal{K}^\bullet : \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1 \to \mathcal{K}^2 \to \dots ,$$

so definieren wir für $p \geq 0$ $\quad F^p\mathcal{K}^\bullet$ als der Komplex mit

$$(F^p\mathcal{K}^\bullet)^i = \begin{cases} 0 & i < p \\ \mathcal{K}^i & i \geq p \end{cases}$$

Es gilt nun der folgende

Satz . Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$H^1_{DR}(X) \cong \mathcal{D}_2 .$$

Beweis. Zunächst gilt offenbar

$$F^p\Omega^{\cdot}_X \xrightarrow{\sim} F^p\mathcal{K}^{\cdot}_X \quad , \quad p \geq 2 .$$

Wir betrachten sodann die Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^q(X,\Omega^p_X) .$$

Diese degeneriert und konvergiert gegen $H^{p+q}_{DR}(X)$:

$$E_1^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}_{DR}(X) .$$

Daneben betrachten wir die Spektralsequenz

$$\tilde{E}_1^{p,q} = H^q(X,\mathcal{K}^p) .$$

Auch diese konvergiert gegen $H^{p+q}_{DR}(X)$:

$$\tilde{E}_1^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}_{DR}(X) .$$

Die Inklusion $\Omega^{\cdot}_X \hookrightarrow \mathcal{K}^{\cdot}$ induziert eine Abbildung von Spektralsequenzen:

$$E_r^{p,q} \longrightarrow \tilde{E}_r^{p,q} .$$

Diese Abbildungen sind für $p\geq 2$ Isomorphismen. Insbesondere ist

$$E_1^{p,q} \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_1^{p,q} \qquad (p\geq 2)$$

Außerdem gilt

$$E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_\infty^{p,q} \qquad (p\geq 2) \quad .$$

Denn

$$E_\infty^{p,q} = F^p H_{DR}^{p+q}(X) \,/\, F^{p+1} H_{DR}^{p+q}(X) \quad ,$$

wobei

$$F^p H_{DR}^n(X) = \mathrm{Bild}(H^n(X, F^p\Omega_X^{\cdot}) \to H^n(X,\Omega_X^{\cdot})) \quad .$$

Hier ist $H^n(X,\Omega_X^{\cdot}) = H_{DR}^n(X)$. Analog ist

$$\tilde{E}_\infty{}^{p,q} = \tilde{F}^p H_{DR}^{p+q}(X) \,/\, \tilde{F}^{p+1} H_{DR}^{p+q}(X) \quad .$$

Dabei ist $\tilde{F}^p$ analog definiert mit $\mathcal{K}_X^{\cdot}$ statt $\Omega_X^{\cdot}$.
Für $p\geq 2$ ist

$$F^p H_{DR}^n(X) = \tilde{F}^p H_{DR}^n(X) \quad ,$$

da

$$F^p\Omega_X^{\cdot} \xrightarrow{\sim} F^p\mathcal{K}_X^{\cdot} \quad .$$

Somit ist auch für diese p

$$E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_\infty{}^{p,q} \quad .$$

Also gilt für $p \geq 2$

$$\dim \tilde{E}_1^{p,q} = \dim E_1^{p,q} = \dim E_\infty^{p,q} = \dim \tilde{E}_\infty^{p,q} \quad .$$

Da nun E_{r+1} die Kohomologie von E_r ist, folgt

hieraus weiter, daß

$$\tilde{d}_r : \tilde{E}_r^{p,q} \longrightarrow \tilde{E}_r^{p+r,q+1-r}$$

für $p+r \geq 2$ verschwindet. Außerdem ist $\tilde{E}_1^{0,q} = H^q(X,\mathcal{M}_X) = 0$, falls $q > 0$. Wir haben damit gezeigt, daß $\tilde{d}_r^{p,q}$ nur für $r=1$, $p=q=0$ nicht verschwinden kann. Die Abbildung $\tilde{d}_1^{0,0}$ ist aber die Differentiation

$$d : \Gamma(X,\mathcal{M}_X) \longrightarrow \Gamma(X, d\mathcal{M}_X + \Omega_X^1) \quad .$$

Also ist

$$\tilde{E}_\infty^{p,q} = \tilde{E}_2^{p,q} = \begin{cases} k & \text{falls } p=q=0 \\ \mathcal{D}_2 & \text{falls } p=1,\ q=0 \\ \tilde{E}_1^{p,q} & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Hieraus folgt nun die behauptete Isomorphie

$$H_{DR}^1(X) \cong \mathcal{D}_2 \quad .$$

Als nächstes geben wir einen elementaren Beweis des folgenden Satzes.

<u>Satz 4.</u> Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X,\Omega_X^1) \longrightarrow \mathcal{D}_2 \xrightarrow{p} H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

Bemerkung. Man erhält dies auch aus dem folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{M}_X & \to & \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X & \to & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \wr & & \\ 0 & \to & \Omega_X^1 & \to & d\mathcal{M}_X + \Omega_X^1 & \to & d\mathcal{M}_X + \Omega_X^1 / \Omega_X^1 & \to & 0 \end{array}$$

und der langen exakten Kohomologiesequenz.

Beweis des Satzes. Die Exaktheit bei $H^{\circ}(X,\Omega_X^1)$ ist klar. Dann definieren wir die Abbildung p wie folgt. Sei $\omega \in \mathcal{D}_2$. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von X in der Zariski-Topologie und reguläre Differentialformen η_α auf U_α sowie rationale Funktionen g_α mit

$$\omega_\alpha = \eta_\alpha + dg_\alpha \quad ,$$

wobei $\omega_\alpha = \omega | U_\alpha$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt dann $\omega_\alpha = \omega_\beta$ und daher

$$\eta_\alpha - \eta_\beta = d(g_\beta - g_\alpha) \ .$$

Wir setzen

$$g_{\alpha,\beta} = g_\alpha - g_\beta \ .$$

Also ist $dg_{\alpha,\beta}$ regulär auf $U_\alpha \cap U_\beta$ und $g_{\alpha,\beta}$ ist rational. Es folgt, daß $g_{\alpha,\beta}$ regulär auf $U_{\alpha,\beta}$ ist und offenbar ein Cech-Kozykel. Dieser definiert ein Element in $H^1(X,\mathcal{O}_X)$. Wir nennen es $p(\omega)$. Man verifiziert nun leicht, daß die Abbildung p wohlbestimmt ist. Wir berechnen nun ihren Kern.

Dazu sei $\omega \in \mathcal{D}_2$ mit $p(\omega)=0$. Nach eventueller Verfeinerung der Überdeckung ist der Kozykel $g_{\alpha,\beta}$ dann ein Korand. Es gibt daher Schnitte

$$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathcal{O}_X|U_\alpha$$

mit

$$g_{\alpha,\beta} = f_\alpha - f_\beta$$

auf $U_\alpha \cap U_\beta$. Wir setzen nun auf U_α

$$F_\alpha := g_\alpha - f_\alpha \ .$$

Dadurch wird eine rationale Funktion F auf ganz X definiert wegen

$$\begin{aligned} F_\alpha &= g_\alpha - f_\alpha = g_\beta - f_\beta + g_\alpha - g_\beta + f_\beta - f_\alpha \\ &= F_\beta + g_{\alpha,\beta} - g_{\alpha,\beta} \\ &= F_\beta \end{aligned}$$

auf $U_\alpha \cap U_\beta$. Wir setzen weiter auf U_α

$$\tilde{\omega}_\alpha = \eta_\alpha + df_\alpha \quad .$$

Hierdurch wird eine reguläre Form $\tilde{\omega}$ auf X definiert. Es gilt

$$\omega - \tilde{\omega} = dF \ ,$$

so daß $\tilde{\omega}$ in derselben Klasse wie ω liegt und überall regulär ist. Demnach ist $\tilde{\omega}$ in $H^0(X,\Omega_X^1)$.

Die Surjektivität folgt aus Dimensionsgründen.

Wir kommen zum Schluß noch kurz zu den Differentialformen dritter Art. Diese sind die geschlossenen meromorphen 1-Formen modulo den exakten. Bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_X^1$ die Garbe der meromorphen 1-Formen, so ist dies gerade gleich

$$\Gamma(X,\mathcal{M}_X^1)^{d=0} \,/\, d\Gamma(X,\mathcal{M}_X) \;.$$

Bemerkung: Im Fall $k=\mathbb{C}$ in der analytischen Topologie von X kann man eine solche Differentialform dritter Art lokal immer schreiben als

$$\xi = dg + \sum_i a_i \frac{df_i}{f_i}$$

mit g meromorph und f_i holomorph.

VI. Verallgemeinerte Albanese-Varietät

1. Einige Hilfsmittel aus der Hodge-Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir einige Tatsachen aus der Hodge-Theorie bereitstellen. Für Einzelheiten und Ergänzungen verweisen wir auf [D] sowie [G-H] , speziell Kapitel III.

Sei X eine glatte projektive Varietät und D ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Dann sei Ω_X^1 die Garbe der holomorphen Differentiale auf X und $\Omega_U^1 = j_*\Omega_X^1$ ($j:U\to X$ die Inklusion) die Garbe der holomorphen Differentiale auf $U = X - |D|$ ($|D|$ = Träger von D). Wir betrachten Ω_X^1 als Untergarbe von Ω_U^1 und bezeichnen mit $\Omega_X^1[\log D]$ die Untergarbe von Ω_U^1, welche von Ω_X^1 und den $\frac{dz_i}{z_i}$ erzeugt werden, wenn z_i die lokalen Gleichungen der irreduziblen Komponenten von D durchläuft. Mit $\Omega_X^p[\log D]$ bezeichnen wir dann einfach die Garbe $\overset{p}{\bigwedge}\Omega_X^1[\log D]$. Dies sind die meromorphen p-Formen auf X mit höchstens logarithmischen Singularitäten längs $|D|$. Wie üblich bezeichnen wir mit $\Omega_X^{\bullet}$ bzw. $\Omega_X^{\bullet}[\log D]$ die zugeordneten Komplexe. Es gilt dann

$$H^{\bullet}(U,\mathbb{C}) = H^{\bullet}(X,j_*\Omega_X^{\bullet}) = H^{\bullet}(X,\Omega_X^{\bullet}[\log D]) = H^{\bullet}(U,\Omega_X^{\bullet}) \text{ ,}$$

wobei die letzten drei Gruppen die Hyperkohomologie sind (siehe [G-H], p.453). Das folgende Lemma ist nun für das folgende wichtig.

<u>Lemma 3</u>. Es gilt $\Gamma(X,\Omega_X^1[\log D]) \subseteq \Gamma(U,\Omega_U^1)^{d=0}$.

<u>Beweis</u>. Dies folgt unmittelbar aus Corollaire 3.2.14 in [D] für $p=1$.

Dieses Lemma besagt mit anderen Worten, daß eine meromorphe 1-Form auf X mit höchstens logarithmischen Singularitäten längs D auf U geschlossen ist.

Für den Beweis des nächsten Lemmas benötigen wir ein Ergebnis aus der Theorie der Spektralsequenzen. Ist $\{E_r^{p,q}\}$ eine Spektralsequenz (siehe hierzu [Go]) eines filtrierten Komplexes $K^{\bullet}$,

$$K^{\bullet} = K_0^{\bullet} \supset K_1^{\bullet} \supset \dots \text{ ,}$$

der die Eigenschaft

$$K_p^n = 0 \qquad \text{für } p>n$$

besitzt, so gibt es eine exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to E_2^{1,0} \to H^1(K^\cdot) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(K^\cdot)$$

(Théorème 4.5.1 in [Go]). Angewandt auf den filtrierten Komplex $\Omega_X^\cdot[\log D]$ ergibt dies folgendes

<u>Lemma 4</u>. Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X,\Omega_X^1[\log D]) \to H^1(U,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to 0 .$$

<u>Beweis</u>. Sei $\mathcal{J}^{\cdot\cdot}$ eine Auflösung von $\Omega_X^\cdot[\log D]$ durch injektive $\mathcal{O}_X$ -Garben, d.h. $\mathcal{J}^{p\cdot}$ ist eine injektive Auflösung von $\Omega_X^p[\log D]$ für alle p . Dann sei $\mathcal{K}^\cdot$ der dazugehörige einfache Komplex, d.h.

$$\mathcal{K}^n = \bigoplus_{a+b=n} \mathcal{J}^{a,b} .$$

Dann ist

$$H^\cdot(X,\Omega_X^\cdot[\log D]) = H^\cdot(\Gamma(X,\mathcal{K}^\cdot)) .$$

Die Hodge-Filtrierung auf $\Omega_X^\cdot[\log D]$ liefert eine Filtrierung von $\mathcal{K}^\cdot$ mit

$$\mathcal{K}_p^n = \bigoplus_{\substack{a+b=n \\ a\geq p}} \mathcal{J}^{a,b}$$

und auch eine Filtrierung von $\Gamma(X,\mathcal{K}^\cdot)$. Darauf wendet man das obige Resultat an mit

$$E_1^{a,b} = H^b(X,\Omega_X^a[\log D^\cdot]) .$$

Nach [D], Corollaire 3.2.13 (ii), degeneriert die Spektralsequenz von E_1 ab und es gilt

$$E_1^{a,b} \Rightarrow H^{a+b}(X,\mathbb{C}) \ .$$

Es gilt insbesondere $E_1^{a,b} = E_2^{a,b}$ und $d_2=0$. Hieraus folgt die gewünschte exakte Sequenz aus obigem Resultat.

Nun betrachten wir den Komplex $\Omega_U^\cdot = j_*(\Omega_X^\cdot)$. Hier gilt ähnliches

Lemma 5. Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to H^0(U,\Omega_U^1)^{d=0} \ / \ d\Gamma(U,\Omega_U^1) \to H^1(U,\mathbb{C}) \to H^1(U,\mathcal{O}_U) \ .$$

Beweis. Wir betrachten den Komples $\Omega_U^\cdot$ ebenfalls mit der Hodge-Filtrierung und erhalten

$$E_1^{p,q} = H^q(U,\Omega_U^p) \ .$$

Wir wollen wiederum (*) anwenden. Dazu müssen die Gruppen $E_2^{1,0}$ und $E_2^{0,1}$ berechnet werden. Zunächst zu $E_2^{1,0}$: dies ist die Kohomologie von

$$E_1^{0,0} \xrightarrow{d} E_1^{1,0} \xrightarrow{d} E_1^{2,0}$$

und wegen $E_1^{i,0} = \Gamma(U,\Omega_X^i)$ (i=0,1,2) gilt

$$E_2^{1,0} = \frac{\Gamma(U,\Omega_U^1)^{d=0}}{d\Gamma(U,\mathcal{O}_U)} \ .$$

Nun zu $E_2^{0,1}$: hier ist es die Kohomologie von

$$0 = E_1^{-1,1} \longrightarrow E_1^{0,1} \xrightarrow{d} E_1^{1,1}$$

und es gilt $E_1^{i,1} = H^1(U,\Omega_U^i)$. Also ist

$$E_2^{0,1} = H^1(U,\mathcal{O}_U)^{d=0} \subseteq H^1(U,\mathcal{O}_U)$$

und wiederum ergibt sich die gewünschte Aussage aus (*) .

Wir fassen nun unsere Resultate zusammen in der folgenden Proposition.

<u>Proposition 3</u>. Es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(X,\Omega_X^1[\log D]) & \longrightarrow & H^1(U,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \dfrac{\Gamma(U,\Omega_U^1)^{d=0}}{d\Gamma(U,\mathcal{O}_U)} & \longrightarrow & H^1(U,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{O}_U) & & .
\end{array}$$

<u>Beweis</u>. Man muß nur Lemma 3 mit Lemma 4 und Lemma 5 kombinieren.

2. Die verallgemeinerte Albanese Varietät

Wir betrachten wie eben einen Körper k der Charakteristik Null und eine glatte k-Varietät U , welche einen k-rationalen Punkt besitze. Dann wollen wir den folgenden Satz beweisen:

<u>Satz 5.</u> Sei $\omega \in \Gamma(U,\Omega_U^1)$ eine auf U holomorphe Differentialform mit $d\omega=0$. Dann existiert eine kommutative algebraische

Gruppe G über k, ein Morphismus $\varphi : U \to G$ über k und ein $\alpha \in \mathfrak{g}^* = \Gamma(G,\Omega_G^1)^{\text{konst.}}$, $\mathfrak{g} =$ Lie-Algebra von G, mit der Eigenschaft, daß

$$\omega = \varphi^*(\alpha) .$$

Zum Beweis dieses Satzes dürfen wir nach Hironaka annehmen und wollen es auch tun, daß $U = X - |D|$ ist für eine glatte projektive Varietät X und einen Divisoren D mit normalen Überkreuzungen. Man überlegt sich leicht, daß dieser Satz aus dem folgenden folgt.

<u>Satz 6</u>. Sei $V \subseteq \Gamma(U,\Omega_U^1)^{d=0}$ ein endlich dimensionaler k-Vektorraum, der $\Gamma(X,\Omega_X^1[\log]D)$ umfaßt. Dann gibt es eine kommutative algebraische Gruppe G_V und einen Morphismus $\varphi : U \to G_V$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Abbildung

$$\varphi^* : \Gamma(G_V,\Omega_{G_V}^1)^{\text{konst.}} = \mathfrak{g}_V^* \longrightarrow \Gamma(U,\Omega_U^1)$$

ist injektiv mit Bild V.

(ii) G_V hat die folgende universelle Eigenschaft: Ist $\psi : U \to H$ eine weitere Abbildung von U in eine kommutative algebraische Gruppe H mit

$$\psi^*(\mathfrak{h}^*) \subseteq V \qquad (\mathfrak{h}^* = \Gamma(H,\Omega_H^1)^{\text{konst.}}) ,$$

so gibt es eine bis auf Translation eindeutig bestimmte Abbildung $\theta : G_V \to H$ der Form

$$\theta = \theta_0 + T$$

mit einem Homomorphismus θ_0 und einer Translation T, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G_V \arrow[dl, "\theta"] \\ H & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wir bezeichnen mit G_V die verallgemeinerte Albanese-Varietät zum Moduln V von X.

Die Existenz einer universellen G_V ist leicht gezeigt. Dazu betrachten wir die Kategorie $\mathcal{C}$, deren Objekte aus denjenigen algebraischen Gruppen H bestehen, für welche es einen Morphismus $\psi_H : U \to H$ gibt mit $\psi_H^*(\mathfrak{J}^*) \subseteq V$, so daß $\psi_H(U)$ die Gruppe H erzeugt. Nach einem Satz von Serre [Se 1] gibt es für U und $\mathcal{C}$ einen universellen Morphismus $\varphi : U \to G_V$, falls die Dimensionen der Gruppen $H' \in \mathcal{C}$ beschränkt sind. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Abbildung

$$\psi_H^* : \mathfrak{J}^* \to V$$

injektiv ist. Dann gilt nämlich

$$\dim H \leq \dim V .$$

Dies erhält man aus dem folgenden Lemma.

<u>Lemma 6</u>. Seien $U, H, \psi = \psi_H$ wie eben. Dann ist die Abbildung $\psi^*: \mathcal{f}^* \to \Gamma(U, \Omega^1)$ injektiv.

<u>Beweis</u>. (Siehe auch [Se 1]). Für $r>0$ ganz sei $\tilde{\psi}: U^r \to H^r$ die von ψ induzierte Abbildung. Wähle r so groß, daß $\varphi = m\,\tilde{\psi}: U^r \to H$ dominant ist (m ist die r -fache Addition). Ist $pr_i: H^r \to H$ die Projektion auf den i -ten Faktoren und $\omega \in \mathcal{f}^*$, so ist

$$m^* = \sum_{i=1}^{r} pr_i^* \quad .$$

Gilt nun $\psi^*(\omega) = 0$, so folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{r} pr_i^* \psi^*(\omega) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\psi}^* pr_i^*(\omega) = \tilde{\psi}^* m^*(\omega) = (m\,\tilde{\psi})^*(\omega) \quad .$$

Also ist $\varphi^*(\omega) = 0$ und weil φ dominant ist $\omega = 0$.

Es genügt daher zu zeigen, daß die Abbildung $\varphi_V: U \to G_V$ von U in die universelle Gruppe G_V die Eigenschaft besitzt, daß

$$\varphi_V^*(\mathfrak{g}_V^*) = V$$

gilt. Dazu darf man $k = \mathbb{C}$ annehmen. Man kann nämlich auf G_V den üblichen descente-Formalismus anwenden, wenn man einen Basispunkt $*$ aus $U(k)$ wählt, und alleAbbildungen $\psi: U \to H$ so normalisiert, daß $\psi(*) = 0$ ist. Damit ist das störende "bis auf Translation" ausgeschaltet.

3. Beweis von Satz 6 (universell semi-abelsch)

Wir beweisen nun die austehende Behauptung von Satz 7 in dem Falle, daß $V = \Gamma(X,\Omega_X^1[\log D])$ ist. Wir werden zeigen, daß in diesem Fall das G_V universell ist für Abbildungen von U in semi-abelsche algebraische Gruppen. Genauer gesagt bedeutet dies:

a) Wenn

$$\varphi : U \to G$$

eine reguläre Abbildung von U in eine semi-abelsche Gruppe G ist, so ist

$$\varphi^*(\mathfrak{g}^*) \subseteq V = \Gamma(X,\Omega_X^1[\log D]) .$$

b) Es gibt eine solche Abbildung φ mit

$$\varphi^*(\mathfrak{g}^*) = \Gamma(X,\Omega_X^1[\log D]) .$$

Aus a) und b) folgt leicht, daß G_V semi-abelsch ist, und die verlangte universelle Eigenschaft besitzt. Die Aussage a) folgt daraus, daß für semi-abelsche G eine Kompaktifizierung $\overline{G}$ existiert, so daß die konstanten Differentiale auf G nur logarithmische Singularitäten haben (siehe [Se 1], [Se 2]). Beim Beweis von b) nehmen wir an, daß $k=\mathbb{C}$ ist, und machen die folgende Konstruktion:

Wir schreiben D als Vereinigung der verschiedenen irreduziblen Komponenten, also

$$D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i .$$

Dann gibt es Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^r \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\overline{\rho}"'] & \mathrm{Pic}\,X \arrow[d] \\ & H^2(X,\mathbb{Z}) \end{tikzcd} ,$$

die gegeben werden durch

$$\begin{tikzcd} (n_1,\ldots n_r) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \mathcal{O}(n_1D_1+\ldots+n_rD_r) \arrow[d, mapsto] \\ & n_1\cdot\mathrm{Klasse}\,(D_1)+\ldots+n_r\cdot\mathrm{Klasse}\,(D_r) \end{tikzcd} .$$

Sei dann $M=\mathrm{Ker}\,\overline{\rho}\subseteq\mathbb{Z}^r$ der Kern von $\overline{\rho}$ und $N=\mathrm{Ker}\,\rho\subseteq M$ der von ρ . Beides sind Untergruppen von $\mathbb{Z}^r$, also

$$M\cong\mathbb{Z}^s \quad , \quad N\cong\mathbb{Z}^t$$

für geeignete $s\geq t$. Sei nun L ein maximaler direkter freier Summand von M/N . Dieser erfüllt dann $L\cong\mathbb{Z}^{s-t}$. Wenn man L zu einem Untermodul von M liftet, den wir wieder L nennen, so ergibt sich eine Injektion

$$\theta : L\hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ(X)=\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Pic}(X)\to H^2(X,\mathbb{Z})) .$$

Wir setzen nun

$$T=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{G}_m) .$$

Dies ist ein Torus, die Charaktergruppe von L , und somit isomorph zu $\mathbb{G}_n^{s-t}$. Wir erhalten dann

$$L = \mathrm{Hom}\ (T, \mathbb{G}_m)\ ,$$

wobei rechts die Homomorphismen algebraischer Gruppen gemeint sind.

Es sei nun A die Albanese-Varietät von X . Dies ist eine abelsche Varietät mit der Eigenschaft, daß $\mathrm{Pic}^\circ(X) = \mathrm{Pic}^\circ(A)$. Außerdem ist sie universell in der Kategorie der abelschen Varietäten für X . Es gibt dann einen Morphismus

$$\bar{\varphi} : X \to A\ .$$

Weiter ist $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}^\circ(A) = \mathrm{Pic}^\circ(X)$ und, wie man leicht verifiziert,

$$\mathrm{Ext}^1(A,T) = \mathrm{Hom}\ (L, \mathrm{Pic}^\circ(X))\ .$$

Daher entspricht dem Homomorphismus θ eindeutig und in kanomischer Weise eine Erweiterung

$$0 \to T \to H \to A \to 0$$

von A durch T . Wir müssen nun verifizieren, daß die Abbildung $\bar{\varphi}$ sich zu einer Abbildung

$$\varphi : U \to H$$

liftet. Dazu bemerken wir lediglich, daß das Pull-back des prinzipalen homogenen T -Raums H unter

$$U \to X \to A$$

trivial wird, da die Abbildung

$$L \to \mathrm{Pic}^{\circ}(X) \to \mathrm{Pic}^{\circ}(U)$$

wegen $\mathcal{O}_X(n_1D_1 + \ldots + n_rD_r)|_U \cong \mathcal{O}_U$ verschwindet. Also besitzt das Pull-back $H\times_A U$ einen Schnitt $\sigma : U \to H\times_A U$. Die gesuchte Abbildung φ ist die erste Komponente von σ .

Wir zeigen als nächstes, daß $\varphi(U)$ die Gruppe H erzeugt. Dazu sei $H' \subseteq H$ die von $\varphi(U)$ erzeugte algebraische Untergruppe. Ferner sei $T' = T \cap H'$. Dann ist H' Erweiterung von A durch T'

$$0 \to T' \to H' \to A \to 0$$

und T' gehört zu einem Quotienten L' von L . Die Klasse H in $\mathrm{Ext}^1(A,T)$ ist Bild der Klasse H' in $\mathrm{Ext}^1(A,T')$ und somit muß die Injektion $\theta : L \to \mathrm{Pic}^{\circ}(X) = \mathrm{Pic}^{\circ}(A)$ über L' faktorisieren. Also ist $L = L'$ und $H = H'$.

H ist schon ein wesentlicher Teil des zu konstruierenden G , aber es reicht im allgemeinen nicht ganz aus.

Um die Konstruktion von G zu Ende zu führen, wählen wir Schnitte $f_1,\ldots,f_t$ aus $\Gamma(U,\mathcal{O}_U^*)$, welche eine Basis von $\Gamma(U,\mathcal{O}_U^*)/\mathbb{C}^*$ bilden. Da

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_U^*)/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} N \subseteq \mathbb{Z}^r$$

ist vermöge

$$f \longmapsto \operatorname{div}(f) ,$$

ist $t' = \operatorname{rang} N = t$. Dann setzen wir

$$S = \mathbb{G}_m^t ,$$

$$G = S \times H$$

und definieren den Morphismus

$$\tilde{\psi} : U \to G = S \times H$$

vermöge

$$\tilde{\psi}(X) = (f_1(X), \ldots, f_t(X), \psi(X)) .$$

Die Dimension von G ist leicht zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \dim(G) &= \dim(H) + \dim(S) \\ &= \dim(A) + \dim(T) + \dim(S) \\ &= g + (s-t) + t \\ &= g + s . \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß dies auch die Dimension von V ist. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

Die Topologie liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Q}) \to H^1(U,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^r \xrightarrow{\bar{\rho}\otimes\mathbb{Q}} H^2(X,\mathbb{Q}) .$$

Also ist

$$\dim H^1(U,\mathbb{Q}) = \dim H^1(X,\mathbb{Q}) + \dim \operatorname{Ker}(\bar{\rho}\otimes\mathbb{Q})$$
$$= 2g + s$$

und wegen Proposition 3

$$\dim \Gamma(X,\Omega^1_X[\log D]) = \dim H^1(U,\mathbb{C}) - \dim H^1(X,\mathcal{O}_X)$$
$$= 2g + s - g$$
$$= g + s \ .$$

Man muß also nur noch zeigen, daß $\tilde{\psi}^*$ injektiv ist, also daß $\tilde{\psi}(U)$ die Gruppe G erzeugt (siehe Lemma 6). Dies geschieht folgendermaßen:

Sei $G' \subseteq G$ die von $\tilde{\psi}(U)$ erzeugte Untergruppe. Die zweite Projektion $G' \to H$ ist surjektiv, da $\psi(U)$ die Gruppe H erzeugt. G' ist zusammenhängend und somit G/G' ein Torus. Wenn dieser nicht trivial ist. so erhält man einen Morphismus

$$G/G' \longrightarrow \mathbb{G}_m ,$$

also eine Abbildung

$$f: G = S \times H \to \mathbb{G}_m ,$$

welche konstant auf dem Bild von U ist. Aus der exakten Sequenz

$$0 = \operatorname{Hom}(A,\mathbb{G}_m) \to \operatorname{Hom}(H,\mathbb{G}_m) \to \operatorname{Hom}(T,\mathbb{G}_m) \to \operatorname{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m)$$

folgt

$$\operatorname{Hom}(H,\mathbb{G}_m) = 0 ,$$

denn nach Konstruktion injiziert $L = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ in $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Pic}^\circ(X)$. Somit faktorisiert f über den ersten Faktor, und es gibt ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_t$, nicht alle gleich Null, so daß für $x \in U$ gilt

$$f(\tilde{\psi}(x)) = f_1^{n_1}(x) \ldots f_t^{n_t}(x) \cdot \text{Konstante}$$

und somit ist

$$f_1^{n_1} \ldots f_t^{n_t} = \text{konstant}$$

auf U. Dies widerspricht der Tatsache, daß die f_i multiplikativ unabhängig in $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*) / \mathbb{C}^*$ sind. Damit ist die Behauptung für $V = \Gamma(X, \Omega_X^1[\log D])$ gezeigt.

4. Beweis von Satz 6 (allgemeiner Fall).

Wir beenden nun den Beweis von Satz 6 im allgemeinen Fall. Dazu sei wieder $k = \mathbb{C}$. Ist V beliebig, so müssen wir Erweiterungen von A durch additive Gruppen betrachten, also Erweiterungen der Form

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow H \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

wobei W ein endlich dimenionaler k-Vektorraum ist, aufgefaßt als algebraische Gruppe. Diese werden klassifiziert durch

$$H^1(A, \mathcal{O}_A) \otimes_k W \cong H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k W \cong \mathrm{Hom}_k(W^*, H^1(X, \mathcal{O}_X)) .$$

Weiter läßt sich die Abbildung

$$\psi_0 : X \longrightarrow A$$

genau dann zu einer Abbildung

$$\psi : U \longrightarrow H$$

liften, wenn die Einschränkung der zu H gehörenden Kohomologieklasse auf U trivial ist, oder die zusammengesetzte Abbildung

$$W^* \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(U,\mathcal{O}_X)$$

verschwindet. In diesem Fall liefert das kommutative Diagramm (mit exakten Zeilen)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{A}^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{L}^* \arrow[r] \arrow[d] & W^* \arrow[r] & 0 \\
& \Gamma(X,\Omega_X^1) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U,\Omega_X^1)^{d=0} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,\Omega_X^1[\log D]) \arrow[r] & H^1(U,\mathbb{C}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

eine Abbildung

$$W^* \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \ .$$

Es gilt dann das folgende Lemma.

Lemma 7. Diese Abbildung stimmt bis aufs Vorzeichen mit der klassifizierenden Abbildung für H überein.

Beweis.

a) Die obige Abbildung ist wie folgt definiert:

Eine Linearform $l \in \mathfrak{f}^*$ definiert eine konstante Differentialform ω auf H. Dann liegt $\psi^*(\omega)$ in $\Gamma(U,\Omega^1_X)^{d=0}$. Da die Abbildung

$$\Omega^\bullet_X[\log D] \longrightarrow j_*(\Omega^\bullet_X|U)$$

($j : U \to X$ die Inklusion) ein Quasiisomorphismus ist, gibt es eine offene Überdeckung (in der üblichen Topologie)

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$$

und holomorphe Funtionen $f_i \in \Gamma(U \cap V_i, \mathcal{O}_X)$, so daß $\psi^*(\omega)-df_i$ nur logarithmische Singularitäten längs $D \cap V_i$ hat.

Da dann auch $d(f_i-f_j)$ nur logarithmische Singularitäten längs $D \cap V_i \cap V_j$ hat, ist f_i-f_j regulär auf ganz $V_i \cap V_j$ und definiert einen Čech-Kozykel. Dessen Klasse in $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ ist das Bild von l.

b) Die zu H gehörende klassifizierende Abbildung

$$W^* \longrightarrow H^1(A,\mathcal{O}_A) = H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

ist folgendermaßen definiert:

Sei $\tilde{l} \in W^*$. Man wählt nun eine offene Überdeckung

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} U_i\,,$$

so daß auf U_i Schnitte

$$g_i : U_i \longrightarrow H$$

der Projektion

$$p : H \longrightarrow A$$

existieren ($p \circ g_i = id_{U_i}$) . Dann ist für $x \in U_i \cap U_j$

$$g_i(x) - g_j(x) \in W ,$$

und $\tilde{l}(g_i(x) - g_j(x))$ definiert einen 1 -Kozykel. Die davon repräsentierte Kohomologie-Klasse in $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ ist das Bild von $\tilde{l}$.

c) Die Beschreibungen in a) und b) hängen wie folgt zusammen: Sei $l \in \mathcal{L}^*$, $\hat{l} = l | W \in W^*$. Man wählt dann eine offene Überdeckung $A = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ wie in b), und setzt

$$V_i = \psi_0^{-1}(U_i) .$$

Die Funktionen

$$f_i(x) = \hat{l}(\psi(x) - g_i \circ \psi_0(x))$$

sind holomorph auf $U \cap V_i$, und erfüllen die Voraussetzungen in a):

Es ist $p_i^{-1}(U_i) \cong W \times U_i$, wobei g_i dem Nullschnitt entspricht: $g_i(x) = (0,x)$. Die Abbildung $\tilde{l}$ und die zweite Projektion pr_2 definieren holomorphe Abbildungen von $p^{-1}(U_i)$ in $\mathbb{C}$ bzw. U_i und die Differentialform $\omega | p^{-1}(U_i)$ ist von der Form

$$\omega = \tilde{l}^*(dt) + pr_2^* \quad \text{(holomorphe Differentialform auf } U_i \text{)} .$$

Da in unseren lokalen Koordinaten $\psi(x)$ gegeben wird durch

$$\psi(x) = (\psi(x) - g_i \circ \psi_0(g),\ \psi_0(x)) \ ,$$

folgt in der Tat

$$\psi^*(\omega) = d(\tilde{l} \circ (\psi - g_i\ \psi_0)) + \text{holomorph.}$$

auf V_i , so daß

$$\psi^*(\omega) - df_i$$

sogar eine holomorphe Differentialform auf V_i ist. Somit wird das Bild von 1 unter der Abbildung in a) repräsentiert durch den Kozykel

$$\begin{aligned}(f_i - f_j)(x) &= \tilde{l}(\psi(x) - g_i \circ \psi_0(x)) - \tilde{l}(\psi(x) - g_j \circ \psi_0(x)) \\ &= -\tilde{l}(g_i \circ \psi_0(x) - g_j \circ \psi_0(x)) \\ &= -\tilde{l} \circ (g_i - g_j)(\psi_0(x)) \ , \quad x \in V_i \cap V_j \ .\end{aligned}$$

Dies ist bis aufs Vorzeichen das Bild von $\tilde{l}$ unter b). Damit ist das Lemma gezeigt.

Wir wenden nun diese Überlegungen wie folgt an:
Sei $V_0 = \Gamma(X, \Omega_X^1[\log D])$, und

$$V \subseteq \Gamma(U, \Omega_X^1)^{d=0}$$

ein endlich dimensionaler Teilraum, welcher V_0 umfaßt. Wähle

$$W = (V/V_0)^* \text{ , also } W^* = V/V_0 \text{ .}$$

Die Abbildung

$$\Gamma(U,\Omega_X^1)^{d=0} \longrightarrow H^1(U,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

induziert

$$W^* = V/V_o \longrightarrow \mathrm{Ker}(H^1(X\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(U,\mathcal{O}_U)) \text{ ,}$$

und somit eine Erweiterung

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow H \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

wie oben, die dies als klassifizierende Abbildung hat sowie ein

$$\psi : U \longrightarrow H \text{ .}$$

Die Abbildung ψ ist nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf Abänderung mit einer Abbildung

$$\lambda : U \rightarrow W \ (\subseteq H) \text{ .}$$

Wir nutzen dies wie folgt aus:
Betrachtet man die Abbildung

$$\mathfrak{f}^* \xrightarrow{\psi^*} \Gamma(U,\Omega_X^1)^{d=0} \longrightarrow H^1(U,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \text{ ,}$$

so verschwindet diese auf $\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{f}^*$, und induziert auf $W^* \cong \mathfrak{f}^*/\mathfrak{a}^*$ das Negative der obigen Einbettung

$$W^* = V/V_0 \hookrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \text{ .}$$

Da der Kern der Abbildung von $H^1(U,\mathbb{C})$ nach $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ das Bild von V_0 ist, und der Kern der Abbildung von $\Gamma(U,\Omega_X^1)^{d=0}$ nach $H^1(U,\mathbb{C})$ das Bild unter d von $\Gamma(U,\mathcal{O}_U)$, ist

$$\psi^*(\mathfrak{f}^*) \subseteq V + d(\Gamma(U,\mathcal{O}_U))$$

$$\psi^*(\mathfrak{a}^*) = \Gamma(X,\Omega_X^1) \subseteq V_0 \ .$$

Durch Abändern von ψ mit einem λ erreicht man, daß

$$\psi^*(\mathfrak{f}^*) \subseteq V \ .$$

Wir nehmen dies im folgenden an. Dann ist automatisch

$$\psi^*(\mathfrak{f}^*) + V_0 = V \ ,$$

und ψ faktorisiert über G_V :

$$U \xrightarrow{\psi_V} G_V \longrightarrow H \ .$$

Also ist $\psi_V^*(\mathfrak{g}_V^*) + V_0 = V$, und da

$$\psi_V^* \ (\mathfrak{g}_V^*) \supseteq \psi_{V_0}^*(\mathfrak{g}_{V_0}^*) = V_0 \ ,$$

ist in der Tat

$$\psi_V^*(\mathfrak{g}_V^*) = V \ .$$

Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen.

Literatur

[D] P. Deligne, Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES 40 (1972), 4-57.

[Go] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1973.

[G-H] P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1978.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.

[Ho-At] W.V.D. Hodge, M.F. Atiyah, Integrals of the second kind on an algebraic variety, Annals Math 62 (1955), 56-91.

[L] H. Lange, Compactified commutative algebraic groups as intersection of quadrics, Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie 58 (1983).

[K-L] F. Knop, H. Lange, Commutative algebraic groups and intersections of quadrics, preprint (1983).

[Mu] D. Mumford, Abelian Varieties, Oxford University Press (1970).

[Se1] J.P. Serre, Morphismes universels et variété d'Albanese, Sém. C. Chevalley (1958/1959).

[Se2] J.P. Serre, Morphismes universels et différentielles de troisième espèce, Sém. C. Chevalley (1958/1959).

[Se3] J.P. Serre, Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, Astérisque 69-70 (1979), 191-202.

[Se4] J.P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris (1959).

[Wü1] G. Wüstholz, Transzendenzeigenschaften von Perioden elliptischer Integrale, erscheint im Journal reine und angew. Math.

[Wü2] G. Wüstholz, Zum Periodenproblem, erscheint in Inv. math.