SUR LA DYNAMIQUE p-ADIQUE ARITHMÉTIQUE DES AUTOMORPHISMES DE L'ESPACE AFFINE

par

Sandra Marcello

***Résumé.* —** Nous montrons que l'ensemble des périodes d'un automorphisme du plan affine défini sur un corps p-adique est majoré par une constante indépendante de l'automorphisme. Nous en déduisons,en dimension 2, une nouvelle preuve de la conjecture de dynamique arithmétique de Silverman.

***Abstract* (On the arithmetic p-adic dynamics of automorphisms of the affine space)**

We show that the set of periods of an automorphism of the affine plane defined over a p-adic field is bounded above by a constant independent from the automorphism. We deduce from this result a new proof in arithmetic dynamics of the Silverman's conjecture in dimension 2.

1. Introduction

Après J. Silverman [**Si94**] et L. Denis [**Den95**], dans [**M2**] et [**M3**] nous nous sommes intéressée à l'étude des propriétés des itérés des automorphismes de l'espace affine définis sur un corps de nombres. En 1995, P. Morton et J. Silverman se sont notamment intéressés au comportement après réduction modulo p des points périodiques d'applications rationnelles de la droite projective [**MS95**], de plus, ces dernières années l'étude de la dynamique ultramétrique ou p-adique (sur $\mathbb{C}_p$) a pris de l'essort (voir par exemple [**B00**],[**B01**] et [**R03**]). Ainsi l'étude du comportement des itérés des automorphismes de l'espaces affines sur un corps p-adique apparaît comme naturelle. La notion

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 37C25,14R10,11F85.
***Mots clefs*. —** Itérés, automorphismes de l'espace affine, corps p-adique.

de point périodique peut être vue comme l'*analogue* de la notion de point de torsion des variétés abéliennes. Les résultats de finitude de points de torsion de variétés abéliennes que ce soit sur un corps nombres (voir par exemple [**HS00**] partie C) ou sur un corps p-adique ([**M86**] remarque 8.4) sont classiques. Nous nous intéressons ici à ce même type de questions dans le cas d'un corps p-adique, nous obtenons même mieux à savoir une *majoration uniforme*.

Notations et définitions. — Nous noterons :

– p un nombre premier,
– K un corps p-adique à savoir une extension finie de $\mathbb{Q}_p$,
– $\mathscr{O}$ l'anneau des entiers de K,
– $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^r)(K)$ le groupe des automorphismes de l'espace affine de dimension $r \geq 2$ défini sur K.
– Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^r)(K)$. Soit P un point ϕ-périodique. Nous noterons $n_{P,\phi}$ la *ϕ-période* de P *i.e* le plus petit entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\phi^n(P) = P$.

Théorème A. — *Soit K un corps p-adique. Il existe $M(K) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2(K))$ et pour tout point ϕ-périodique P nous avons :*

$$0 \leq n_{P,\phi} \leq M.$$

Nous pensons que ce résultat est encore vrai en dimension supérieure. Nous redémontrons grâce à ce résultat un résultat de dynamique arithmétique dû à L. Denis [**Den95**] (corollaire B).

Définition. — Soit F un corps de nombres. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^r(F))$.
Soit $P \in \mathbb{A}^r(F)$. Ce point P est un *point ϕ-périodique isolé* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que P est isolé (au sens de la topologie de Zariski) dans

$$\{Q \in \mathbb{A}^r(F) \quad \text{tel que} \quad \phi^n(Q) = Q\}.$$

Conjecture de Silverman : *Soit F un corps de nombres. Soit $\phi \in Aut(\mathbb{A}^r(F))$. L'ensemble des points périodiques isolés de ϕ est un ensemble fini.*

Corollaire B. — *La conjecture de Silverman est vraie en dimension 2.*

L'approche utilisée pour démontrer le théorème A est analogue à celle utilisée par l'auteure dans le cas des corps de nombres [**M2**]. Nous obtenons

une majoration uniforme pour certains automorphismes réguliers et les automorphismes triangulaires et concluons grâce à la classification des automorphismes du plan affine.
Dans le dernier paragraphe, nous faisons le lien avec la dynamique arithmétique et montrons le corollaire B.

Remerciements. — L'auteure remercie le réseau européen Arithmetic Algebraic Geometry. Ce travail a été effectué au Max-Planck Institut für Mathematik que l'auteure remercie pour les excellentes conditions de travail. L'auteure remercie très vivement Jaya Iyer de lui avoir parlé des travaux de N. Fakhruddin et enfin l'auteure remercie ce dernier de lui avoir communiqué son texte [**F02**].

2. Classification des automorphismes du plan affine

En 1942, H. W. E. Jung [**J42**] a obtenu une classification des automorphismes du plan affine complexe. En 1970, L.G. Makar-Limanov [**M70**] a donné une autre preuve (valable pour tout corps) de ce théorème (voir [**C85**]).

Nous introduisons deux familles d'applications :

– une *application de Hénon généralisée* est une application g de la forme $g(x,y) = (p(x) - ay, x)$ où a est une constante non nulle et p est un polynôme unitaire de degré au moins 2.

– une *application élémentaire* (ou *triangulaire*) est une application e de la forme $e(x,y) = (\alpha x + q(y), \beta y + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in K$, $\alpha\beta \neq 0$ et q(y) une application polynomiale. Les applications élémentaires forment un groupe : appelé *groupe des automorphismes élémentaires* et noté E.

S. Friedland et J. Milnor [**FM89**] ont prouvé, à l'aide du théorème de Jung [**J42**], l'énoncé suivant sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$, leur démonstration est également valable sur un corps p-adique, nous avons donc :

Théorème 2.1. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2(K))$. Alors, il existe $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2(K))$ tel que :*

– *soit $\psi^{-1}\phi\psi$ est la composée d'applications de Hénon généralisées,*
– *soit $\psi^{-1}\phi\psi$ est une application élémentaire.*

3. Automorphismes réguliers

3.1. définition et propriétés. — La notion d'automorphisme régulier a été introduite par N. Sibony dans [**S99**], ils sont intéressants du point de vue de la dynamique holomorphe [**S99**] et de la dynamique arithmétique (sur un corps de nombres) [**M1**] et [**M2**] .

Définition 3.1. — Soit ϕ un automorphisme de $\mathbb{A}^r$, $Z(\phi)$ désigne le lieu de non-définition de l'application rationnelle (définie sur $\mathbb{P}^r$) associée à ϕ. L'automorphisme ϕ est dit *régulier* si ϕ n'est pas une application linéaire et :

$$Z(\phi)\cap Z(\phi^{-1}) = \emptyset.$$

Remarque 3.2. — Soit H l'hyperplan à l'infini, nous avons $Z(\phi) \subset H$. Une application de Hénon généralisée est un cas particulier d'automorphisme régulier.

Lemme 3.3. — *Un produit fini d'applications de Hénon généralisées est un automorphisme régulier.*

Ce résultat s'obtient directement en composant les applications.

Nous utiliserons la proposition suivante que nous avons démontrée, dans le cas des corps de nombres, dans [**M2**] (proposition 2.23), la démonstration est également valable dans le cas des corps p-adiques ou des corps finis.

Proposition 3.4. — *Soit ϕ un automorphisme régulier de $\mathbb{A}^r$. Alors, pour tout entier naturel n non nul ϕ^n est régulier et $Z(\phi^n) = Z(\phi)$.*

3.2. Un résultat préliminaire. —

Définition 3.5. — Soit X une variété sur un corps K. Soit $f : X \cdots \to X$ une application rationnelle. Nous dirons que P est un point *f-périodique* si f est définie en $P, f(P), f^2(P), \cdots$ et il existe $n > 0$ tel que $f^n(P) = P$. La *période* (notée $n_{f,P}$ d'un point f-périodique est le plus petit entier naturel non nul tel que $f^n(P) = P$.

Le théorème suivant est dû à N. Fakhruddin, nous donnons ici des étapes de la preuve et renvoyons le lecteur à [**F02**] pour plus de détails.

Théorème 3.6. — *Soit $\mathscr{X}$ un schéma intègre propre de type fini sur* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$. *Alors, il existe une constante $M > 0$ telle que*
$\forall f : \mathscr{X} \cdots \to \mathscr{X}$ *application birationnelle telle que* $\forall n > 0$, $Z(f^n) \cap Z(f^{-n}) = \emptyset$
$\forall P \in \mathscr{X}(K)$ *f-périodique nous avons :*

$$1 \leq n_{f,P} \leq M$$

Il suffit de montrer le résultat pour une composante connexe de l'adhérence de Zariski de l'orbite d'un point périodique, en effet le corps résiduel étant fini le nombre de composantes connexes de l'adhérence de l'orbite peut être majoré indépendamment du point et de l'application. À chaque composante connexe on associe de manière unique un point fermé p_i dont on majore la période par une constante $n-i$ ne dépendant que du schéma. On considère un point de l'orbite de départ dont la spécialisation est ce point fermé, on considère l'orbite de ce point sous l'action de f^{n_i} et on majore la période. La majoration s'obtient d'abord modulo une puissance de p, puis il s'agit de montrer que la puissance peut elle-même être majorée.

3.3. Un résultat général pour certains automorphismes réguliers. —

Notation. — Nous noterons $\mathscr{X}_s$ la fibre spéciale de $\mathscr{X}$. Soit $\phi \in \mathbb{A}^r(K)$. Par abus de langage nous noterons également ϕ l'application birationnelle du schéma projectif associé à $\mathbb{A}^r$.

Théorème 3.7. — *Soit K un corps p-adique. Soit $r \geq 2$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout ϕ un automorphisme régulier de $\mathbb{A}^r(K)$, tel que :*

$$\phi|_{\mathscr{X}_s} \cap \phi^{-1}|_{\mathscr{X}_s} = \emptyset,$$

pour tout $P \in \mathbb{A}^r(K)$ ϕ-périodique alors :

$$1 \leq n_{\phi,P} \leq M.$$

La preuve de ce théorème découle du théorème 3.6 et de la proposition 3.4.

4. Preuve du résultat principal

4.1. Applications triangulaires. —

Définition 4.1. — Un automorphisme ϕ de $\mathbb{A}^r(K)$ est dit *triangulaire* s'il existe $F_i \in K[X_{i+1},\ldots,X_r]$ pour $1 \leq i \leq r-1$, $F_r \in K$ et $a_i \in K^*$ pour $1 \leq i \leq r$ tel que :

$$\begin{aligned}\phi(X_1,\ldots,X_r) &= (a_1X_1+F_1(X_2,\ldots,X_r), a_2X_2+F_2(X_3,\ldots,X_r),\\ &\qquad \ldots, a_{r-1}X_{r-1}+F_{r-1}(X_r), a_rX_r+F_r).\end{aligned}$$

Notation. — Soit μ_K le groupe (fini) des racines de l'unité de K.

Lemme 4.2. — *Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour toute une application triangulaire ϕ de $\mathbb{A}^r(K)$, pour tout point ϕ-périodique P : $1 \leq n_{\phi,P} \leq M$.*

Il s'agit de détermiier les itérés, de considérer deux cas suivant que l'un au moins des coefficients a_i est ou non une racine de l'unité et de conclure en utilisant le fait que μ_K est un groupe fini.

4.2. Conjugaison par un automorphisme affine. — Le lemme suivant a été utilisé par L. Denis [**Den95**] dans le cas des corps de nombres, sa démonstration est également immédiate dans le cas des corps p-adiques.

Lemme 4.3. — *Soient ψ, ϕ des automorphismes de l'espace affine $\mathbb{A}^r(K)$. Supposons qu'il existe f un automorphisme de l'espace affine $\mathbb{A}^r(K)$ tel que $\psi = f^{-1}\phi f$ alors :*

P est ψ-périodique si et seulement si $f(P)$ est ϕ-périodique.

4.3. Preuve du théorème A. —

Lemme 4.4. — *Soit $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Soit $\phi_i \in \mathbb{A}^r(K)$ des applications de Hénon généralisées pour $1 \leq i \leq m$.*
Alors, $\psi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_i \circ \cdots \circ \phi_m$ est un automorphisme régulier vérifiant :

$$\psi|_{\mathscr{X}_s} \cap \psi^{-1}|_{\mathscr{X}_s} = \emptyset.$$

En effet, la composante de ψ ou ψ^{-1} de plus haut degré est de la forme : $x^n + f(x,y)$ ou $y^n + g(x,y)$ avec $\deg(f) < n$ et $\deg(g) < n$ (ici deg désigne le degré total), car dans la définition des applications de Hénon généralisées interviennent des polynômes unitaires.

La preuve du théorème A découle immédiatement des théorèmes 2.1 et 3.7, et des lemmes 4.2, 4.4, 3.3 et 4.3.

5. Lien avec la dynamique arithmétique

Proposition 5.1. — *Si pour tout corps p-adique K, il existe* $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *tel que pour tout* $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^r(K))$*, pour tout point* ϕ*-périodique P, nous avons :* $1 \leq n_{\phi,P} \leq M$*, alors,*

si F est un corps de nombres, pour tout $\phi \in Aut(\mathbb{A}^r(F))$ *:*

l'ensemble des points ϕ*-périodiques isolés est fini.*

Pour démontrer ce résultat on utilise la décomposition suivante de l 'ensemble des points ϕ-périodiques $B(\phi, K) = \cup_{N \geq 1} B_N(\phi, K)$, avec $B_N(\phi, K) := \{P \in \mathbb{A}^n(K); \phi^N(P) = P\}$, c'est un fermé, il admet donc un nombre fini de points isolés. Le théorème A nous permet de dire que la réunion est finie, de plus tout corps de nombres peut être plongé dans un corps p-adique, d'où le résultat.

La proposition nous permet conjointement avec le théorème A d'obtenir le corollaire B.

Références

[B00] R. L.Benedetto, p-adic dynamics and Sullivan's no wandering domains theorem. Compositio Math. 122, no. 3, 281–298 (2000).

[B01] R. L.Benedetto, Hyperbolic maps in p-adic dynamics. Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 1, 1–11 (2001).

[C85] P.M. Cohn, Free rings and their relations (2nd ed.) London Mathematical Society Monographs 19 (1985)

[Den95] L. Denis, Points périodiques des automorphismes affines, J. reine angew. Math. 467, 157-167 (1995).

[F02] N. Fakhruddin, Boundedness results for periodic points on algebraic varieties, arXiv :math.NT/0212200 (2002).

[FM89] S. Friedland, J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Ergodic Theory Dynamical systems 9, 67-99 (1989)

[HS00] M. Hindry, J. Silverman, Diophantine geometry, an introduction, Graduate Texts in Mathematics 201, Springer Verlag (2000).

[J42] H. W. E. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. reine angew. Math. 184, 161-174 (1942).

[M70] L.G. Makar-Limanov, On automorphisms of certain algebras. Candidate's dissertation, Moscou 1970.

[M1] S. Marcello, Sur les propriétés arithmétiques des itérés d'automorphismes réguliers, C. R. Acad. Sci. Paris, t.331, Série I,11-16 (2000)

[M2] S. Marcello, Sur la dynamique arithmétique des automorphismes de l'espace affine, Bulletin de la S.M.F. 31 229-257 (2003).

[M3] S. Marcello, Géométrie, points rationnels et itérés des automorphismes de l'espace affine (2003).

[M86] J.S. Milne, Abelian varieties, 103-15 in Arithmetic geometry, ed Cornell-Silverman Springer-Verlag (1986).

[MS95] P. Morton, J. Silverman, Periodic points, multiplicities and dynamical units J. reine angew.Math. 461 81-122 (1995).

[R03] J.Rivera-Letelier, Dynamiques des fonctions rationnels-sur des corps locaux 147-230 in geometric methods in dynamics II éditeurs W. de Melo, M. Viana, J-C. Yoccoz, Astérisque 287 (2003).

[S99] N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, Panoramas et Synthèses 8 (S.M.F.), 97-195 (1999) .

[Si94] J. Silverman, Geometric and arithmetic properties of the Hénon map, Math. Z. 215, 237-250 (1994).

---

4 novembre 2003

SANDRA MARCELLO, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111, Bonn, Deutschland, • *E-mail :* `marcello@mpim-bonn.mpg.de`