Einführung und Kommentare

zu F. Kleins Ikosaederbuch

P. Slodowy

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3

Mathematisches Institut B
Universität Stuttgart

D–7000 Stuttgart 80

erscheinen in einer Neuauflage des Buches von F. Klein "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", bei Birkhäuser, Basel/Teubner, Leipzig.

MPI/90–13

Die Wiederveröffentlichung von Felix Kleins "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" entspricht der ständig wachsenden Nachfrage nach diesem Werk, das vor mehr als hundert Jahren in Leipzig erschien. Ein Gutteil des Interesses an Kleins Buch dürfte sicher auf die ungebrochene Aktualität von "Ikosaedermathematik" zurückzuführen sein, d.h. von Mathematik, in der die Geometrie und Symmetrie des Ikosaeders, wie auch die der anderen Platonischen Körper und der regulären Polygone, eine wesentliche Rolle spielen. In dieser Hinsicht seien die folgenden Entwicklungen in den letzten zwanzig Jahren genannt: Das Studium der sogenannten Kleinschen Singularitäten, auch als Du–Val–Singularitäten, rationale Doppelpunkte oder einfache Singularitäten bekannt (vgl. etwa die Übersichtsartikel von Arnol'd [1974], Brieskorn [1976], Durfee [1979], Slodowy [1983]), die Untersuchung gewisser elliptischer und Hilbert–Blumenthal Modulflächen (vgl. Hirzebruch [1976], [1977], Naruki [1978], Burns [1983]), die Konstruktion eines unzerlegbaren Vektorbündels vom Rang 2 auf dem $\mathbb{P}^4$ (Horrocks–Mumford [1973]) sowie die Analyse seiner Eigenschaften (Arbeiten seit 1985 von Barth, Hulek, Lange, Moore, Decker, Schreyer, vgl. dazu den Übersichtsartikel von Hulek [1989]). Ein besonders bemerkenswerter Sachverhalt, zumal im Hinblick auf Kleins Danksagung an Sophus Lie in der Vorrede seines Buches, ist die Beziehung zwischen den Platonischen Körpern, oder genauer den endlichen Untergruppen von $SU(2,\mathbb{C})$, und den komplexen einfachen Liegruppen der Typen A_r, D_r, E_r, die von Grothendieck und Brieskorn entdeckt wurde (vgl. Brieskorn [1970]). Während diese Entdeckung auf tiefliegenden Untersuchungen zur Auflösung und Deformationstheorie der oben genannten Flächensingularitäten sowie zur Geometrie der Konjugationsklassen einfacher algebraischer Gruppen aufbaute, wurde eine direktere, wenn auch formalere Herleitung dieser Beziehung von J. McKay gegeben, der zeigte, wie sich die irreduziblen Charaktere der endlichen binären Gruppen in natürlicher Weise durch die Ecken der erweiterten Coxeter–Witt–Dynkin–Diagramme der zugehörigen Liegruppen parametrisieren lassen (vgl. McKay [1980], Ford–McKay [1979]).

Die meisten der oben genannten Entwicklungen und Resultate haben Anstoß zu weiteren fruchtbaren Forschungen gegeben, die diese Resultate entweder miteinander verbunden oder in komplizierteren Situationen verallgemeinert haben (so wurde McKays Beobachtung weiterentwickelt von Happel–Preiser–Ringel [1980], Iwahori–Yokonuma [1982], Steinberg [1985], Kostant [1985], Springer [1987]; die Beziehung zur Singularitätentheorie wurde hergestellt von Gonzalez–Sprinberg und Verdier [1981], [1983], Knörrer [1985_a], sodann in allgemeinen Zusammenhang gesetzt von Artin–Verdier [1985], Esnault–Knörrer [1985], Auslander [1986], vgl. auch die Übersichtsartikel Knörrer [1985_b], Schreyer [1987]). Es hat aber auch immer wieder Entdeckungen gegeben, und es wird sie wohl zukünftig weiter geben, bei denen das Ikosaeder oder die regulären Körper in überraschender Weise neues Licht auf zunächst ferner liegende Sachverhalte geworfen haben. Dabei ist die Anknüpfung an die bisherigen Resultate teilweise ein Problem geblieben (vgl. z. B. die Übersichten von Arnol'd [1983] und Bennequin [1984]; während der Vorbereitung zu dieser Einleitung erschienen die Arbeiten von Kronheimer [1986], [1987] und von Capelli–Itzykson–Zuber [1987], Ginsparg [1987], denen theoretisch–physikalische Fragestellungen zugrunde liegen). In jedem Fall hat Kleins "Ikosaederbuch" als beliebte Referenz für "Ikosaedermathematik" gedient, und es wird diese Rolle auch weiterhin spielen.

Wie bedeutend dieser Aspekt des Buches auch sein mag, so präsentiert er es doch nur als einen Steinbruch, in dem man bei Gelegenheit mathematische Schätze finden kann. Will man ein vollständiges Bild des Buches haben, so hat man auch den zweiten Teil seines Titels zu beachten. Kleins Hauptziel war es nämlich, eine originelle Synthese der Theorien über die Gleichungen fünften Grades zu geben, die im Jahre 1858 auf unabhängigem Wege von Hermite, Brioschi und Kronecker mit der Konstruktion transzendentaler Lösungen geschaffen worden waren. Für Klein sollten dabei das Ikosaeder und seine Geometrie im Vordergrund stehen.

An dieser Stelle mag es genügen, eine grobe Beschreibung von Kleins diesbezüglichem Hauptresultat zu geben. Sei dazu G die Ikosaedergruppe, d.h. die Gruppe der Drehsymmetrien eines regulären Ikosaeders. Diese Gruppe operiert auf der dem Ikosaeder umbeschriebenen Kugel, die wir mit der Riemannschen Zahlenkugel, also der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$ identifizieren. Der Quotient von $\mathbb{P}^1$ nach G identifiziert sich wiederum mit $\mathbb{P}^1$ und die Quotientenabbildung $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ ist eine verzweigte Überlagerung von Grad 60, der Ordnung von G. Das Problem einen Urbildpunkt unter dieser Abbildung zu berechnen kann als das der Lösung einer Gleichung vom Grade 60 angesehen werden. Klein nennt eine solche Gleichung eine Ikosaedergleichung. Das Ziel des zweiten Teils des Ikosaederbuches ist der konstruktive Nachweis, daß die Lösung einer beliebigen Gleichung fünften Grades (mit komplexen Koeffizienten) mittels im wesentlichen rationaler Manipulationen auf die Lösung einer Ikosaedergleichung reduziert werden kann. Die Lösung der letzteren kann dann mittels hypergeometrischer Reihen oder mittels elliptischer Integrale und Modulfunktionen bewerkstelligt werden.

Nun steuert Klein in seinem Buch keineswegs geradlinig auf dieses Ziel zu. Seine Intention war es nicht, eine ausgefeilte Theorie mit klaren abgegrenzten Definitionen, Theoremen und formalen Beweisen zu präsentieren. Stattdessen wollte er einen breiten Leserkreis mit zahlreichen mathematischen Ideen und Entwicklungen vertraut machen, die bei seinen eigenen Arbeiten und in seinem Denken eine zentrale Rolle spielten. Dabei war sein Stil mehr erzählend und beschreibend als systematisch und deduktiv. Nicht nur aus moderner Sicht lassen sich relativ kurze Beweise für Kleins Hauptresultate geben (vgl. die Darstellungen von Weber [1899] und Dickson [1930]). In Anbetracht der

Länge und Gewundenheit des Ikosaederbuches mag dies für manchen Leser eine Enttäuschung sein. Andererseits dürften es aber gerade die Fülle des Ikosaederbuches wie auch Kleins Kunst, verschiedene mathematische Gebiete miteinander zu verweben, sein, die das Interesse an diesem Text bis heute wachgehalten haben. Für einige Lobreden in dieser Hinsicht sei etwa auf D. Hilberts berühmten Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris (Hilbert [1900]), und auf H. Weyls Artikel über Kleins Werk und Persönlichkeit (Weyl [1930]) verwiesen.

Wie prominente Autoren bestätigen (vgl. z. B. Dickson [1930], Serre [1978]), bereitet Kleins Stil dem Leser beträchtliche Schwierigkeiten, zumal wenn er durch moderne Lehrbücher erzogen wurde. Zudem ist der Text des Ikosaederbuches ein Zeugnis des Entwicklungsstadiums der Mathematik zur Zeit seiner Fertigstellung. So präsentiert Klein die Theorie von Galois in einer Formulierung, wie sie im wesentlichen noch auf Galois selbst zurückgeht und in den Textbüchern von Serret [1866] und Jordan [1870] elaboriert war. Obwohl sich die Grundzüge schon in Arbeiten von Dedekind und Kronecker finden, benötigte die heutzutage übliche Interpretation der Theorie von Galois in Begriffen von Körpererweiterungen und ihren Automorphismen noch einige Jahrzehnte um vollen Einfluß zu gewinnen (unter Weber, Hilbert, Steinitz, Artin, Noether, van der Waerden). Auch arbeitete Klein noch nicht in den Kategorien, in die wir heute geometrische Untersuchungen plazieren. In diesem Sinne wechselt er sehr oft seinen Standpunkt. Während einige Abschnitte des Buches, darunter natürlich diejenigen, die sich mit der transzendenten Lösung der Ikosaedergleichung beschäftigen, in den Bereich der komplexen Analysis fallen, können andere der Kategorie der algebraischen Varietäten und regulären Morphismen über einem Grundkörper der Charakteristik Null zugerechnet werden. Obwohl sie nicht als solche erwähnt werden, schenkt Klein den Definitionskörpern dennoch Beachtung indem er gelegentliche Bemerkungen über die in expliziten Formeln auftretenden Koeffizienten macht. Oft genug wechselt Klein auch zu einem birationalen Standpunkt, d. h. auf die Ebene der Funktionenkörper der involvierten Varietäten. Bekanntlich bedeutet dies keine Abschwächung solange man sich mit glatten Kurven beschäftigt. Einige Aussagen Kleins über höherdimensionale Varietäten sind jedoch mit Vorsicht anhand der expliziten Formeln in den korrekten Gültigkeitsbereich einzuordnen. In einer anderen Richtung konnte Klein noch keinen Gebrauch machen von den Begriffen und Resultaten der Darstellungstheorie, wie sie ab 1896 von Frobenius, Burnside und Schur entwickelt wurde. Zahlreiche darstellungstheoretische Probleme, die man heutzutage mit charaktertheoretischen Methoden angehen würde, wurden von Klein mit geometrischen oder invariantentheoretischen Argumenten gelöst. Klein war sich der Möglichkeit einer algebraischeren Behandlung vieler Fragen bewußt, aber er betonte immer wieder seine Vorliebe für geometrische Argumentationen, denen er das "Vorrecht der Erfindung" zuschrieb (vgl. Klein [1879_a] Einführung, wie auch Abschnitt II, Kap. 5, § 8 des Ikosaederbuches; eine gewisse Unterstützung erhält Kleins Auffassung in den einführenden Bemerkungen von Horrocks und Mumford [1973], wo diese Autoren zwar die Effektivität charaktertheoretischer Rechnungen aber dabei auch einen Mangel an geometrischer Einsicht konstatieren).

Um dem heutigen Leser den Zugang zu Kleins Ikosaederbuch zu erleichtern, haben wir dem Text eine mathematische Einführung beigefügt, die Kleins Hauptresultate in einer zeitgemäßeren Formulierung erläutert. Dabei machen wir einige Anleihen bei unserem früher erschienenen Aufsatz (Slodowy [1986]). Auch geben wir dort eine Übersicht über den Aufbau des Buches und die Rolle der einzelnen Kapitel. Separat dazu haben wir zahlreiche Kommentare verfaßt, die sich – in Form von Marginalien – auf einzelne Kapitel oder Textstellen beziehen, und die vor allem für den Leser gedacht sind, der bereits mit der Lektüre des Buches beschäftigt ist oder sie beendet hat. Am Ende des Buches geben wir eine Skizze der Weiterentwicklungen der Kleinschen Theorie, der wir Nachdrucke der Arbeiten von Brauer [1934] und Serre [1978] angefügt haben. In einem für diese Ausgabe verfaßten Aufsatz beschreibt schließlich O. Neumann eine von der Kleinschen Theorie abweichende Lösungstheorie für Gleichungen beliebigen Grades, die auf C. Jordan [1870] zurückgeht und hyperelliptische Modulfunktionen höherer Geschlechter benutzt.

Für einen normalerweise nicht historisch arbeitenden Mathematiker ist der Versuch, einen historischen Text wie das Ikosaederbuch verstehen zu wollen, ein durchaus ungewöhnliches Unterfangen. Gewiß gibt es einen mathematischen Kern, der sich klar herausarbeiten läßt. Aber es gibt auch mannigfaltige Verzweigungen und Schattierungen, deren Bedeutung man nur im historischen Kontext erschließen kann. Wir haben hier von einer einheitlichen Darstellung dieses Umfeldes Abstand genommen, da sie zu umfangreich geworden wäre. Es stehen hier auch andere Quellen zur Verfügung, wie Wussing [1969], Scholz [1980], und vor allem Gray [1986], in denen die Bedeutung von Kleins explizitem transformationsgruppentheoretischen Denken herausgearbeitet und die Enstehung seiner Gleichungstheorie im Zusammenhang mit der Entwicklung der Theorien der linearen Differentialgleichungen, der elliptischen Modulfunktionen und der automorphen Funktionen beschrieben wird. Im einzelnen erweisen sich Kleins eigene Kommentare in seinen Gesammelten Mathematischen Abhandlungen [1921], [1922], [1923] und seinen Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert [1926] als sehr hilfreich.

Wir können schließlich den Leser nur auf seine eigene Entdeckungsreise schicken durch "that tract of beautiful country, seen at first in the distance, but which will bear to be rambled through and studied in every detail of hillside and valley, stream, rock, wood, and flower" (Cayley, zitiert nach der Einführung des Übersetzers, G.G. Morrice, in die erste englische Ausgabe des Ikosaederbuches, 1888).

Bonn, Januar 1990 Peter Slodowy

Einführung in die Thematik des "Ikosaederbuches"

1. Auflösungen algebraischer Gleichungen aus der Sicht der Galoistheorie

Formeln für die Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen sind uns seit der Antike bekannt. Zu Anfang des 16. Jahrhunderts gelang italienischen Mathematikern (Scipio del Ferro, Ferrari, in den Schulen von Tartaglia und Cardano, 1515–1545) die Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades. Für die Lösungen der Gleichungen dritten Grades hat man die sogenannten Formeln von Cardano. Mittels der Substitution $x = y - a/3$ läßt sich jede Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (a,b,c \in \mathbb{C})$$

auf eine solche der Form

$$y^3 + py + q = 0$$

reduzieren. Ist $d = q^2/4 + p^3/27$, so lauten die drei Lösungen nun

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{d}}$$

(Die durch die beiden dritten Wurzeln verursachte Mehrdeutigkeit von i. allg. neun Werten reduziert sich auf drei unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das Produkt beider

Wurzeln gleich $-p/3$ ist.)

Bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts versuchten viele Mathematiker, darunter Tschirnhaus, Euler, Bezout, Malfatti, Vandermonde, Lagrange, auch Gleichungen höherer Grade durch Iteration und rationale Kombination von Wurzeln (d.h. Radikalen) zu lösen. Erfolg zeigte sich immer nur bei Gleichungen sehr spezieller Form, und schließlich zeigten Ruffini (1799) und Abel (1824/26), daß die Lösung allgemeiner Gleichungen 5. Grades nicht mit Hilfe von Radikalen zu bewerkstelligen ist. Die teilweise berechtigte Kritik an Ruffinis und Abels Beweisen verstummte zwar nur langsam, aber spätestens seit der öffentlichen Rezeption des Werkes von Galois (1831, publiziert 1846) wurde deren Resultat unbezweifelbar.

Aus moderner Sicht stellt sich die Galoissche Behandlung des Auflösungsproblems für eine algebraische Gleichung

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

mit komplexen oder tranzendenten Koeffizienten – dies sind die klassischen Fälle – folgendermaßen dar. Sei k der von den Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ über $\mathbb{Q}$ erzeugte Körper (oder auch eine Erweiterung desselben) und $K = k(x_1, \dots, x_n)$ der von den Lösungen $x_1, \dots, x_n$ von $P(x) = 0$ erzeugte Zerfällungskörper. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(P,k)$ der Gleichung $P(x) = 0$ über k ist dann gleich der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K,k)$ der Körpererweiterung $k \subset K$, d.h. gleich der Gruppe aller Körperautomorphismen von K, die k elementweise festlassen. Im klassischen Kontext ist $\mathrm{Gal}(P,k)$ eine Gruppe von Permutationen der n Wurzeln $x_1, \dots, x_n$ von P. Diese Interpretation ergibt sich jetzt durch Betrachtung der Aktion von $\mathrm{Gal}(K,k)$ auf den Wurzeln $x_1, \dots, x_n$. So werden diese Wurzeln durch $\mathrm{Gal}(K,k)$ permutiert. Aber jeder Automorphismus von K über k ist auch durch diese Permutation eindeutig bestimmt.

Die Galoisgruppe $Gal(P,k)$ ist ein qualitatives Maß für die Komplexität des Auflösungsprozesses der Gleichung $P(x) = 0$ oder, mit anderen Worten, für die Komplexität der algebraischen Körpererweiterung $k \subset K$.

Jede endliche Gruppe G besitzt eine Kompositionsreihe, d.h. eine Folge von Untergruppen G_i

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_m = \{1\} ,$$

so daß G_{i+1} normal in G_i und die Quotientengruppe G_i/G_{i+1} einfach ist. (Wir betrachten auch die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung als einfach.) Obwohl die Folge der G_i nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht, sind es die einfachen Quotienten G_i/G_{i+1} , bis auf Anordnung. Einer Kompositionsreihe der Galoisgruppe $G = Gal(P,k) = Gal(K,k)$ entspricht nun eine aufsteigende Folge

$$k = k_1 \subset k_2 \subset \dots \subset k_m = K$$

der Fixkörper $k_i = K^{G_i}$. Dabei ist k_{i+1} eine Galoiserweiterung von k_i mit der Gruppe G_i/G_{i+1} . Das Problem der Konstruktion der Wurzeln $x_1, \dots ,x_n$ der Gleichung $P(x) = 0$ oder – abstrakter – des Körpers K ist damit in eine Reihe von einfacheren Schritten zerlegt, nämlich der Konstruktion der Lösungen geeigneter Hilfsgleichungen $P_i(y) = 0$, $P_i \in k_i[y]$, die den Körper k_{i+1} über k_i erzeugen. Besonders deutlich wird dies in dem Fall, daß die Gruppe G auflösbar ist, d.h. daß alle einfachen Quotienten einer Kompositionsreihe abelsch, also zyklisch von Primzahlordnung sind. Genau in diesem Fall lassen sich nämlich die Wurzeln $x_1, \dots, x_n$ durch iterierte Radikale darstellen. Nehmen wir an, daß k alle Einheitswurzeln der Ordnung $|G|$ enthält, was sich durch Wurzelziehen erreichen läßt, so folgt die Darstellbarkeit der Wurzeln durch Radikale aus dem folgenden Normalformsatz für zyklische Erweiterungen, der auf die Zwischenerweiterungen $k_i \subset k_{i+1}$ anzuwenden ist.

Satz: Sei k ein Körper und $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, eine nicht von $\mathrm{char}(k)$ teilbare Zahl. Der Körper k enthalte die Gruppe μ_q der q–ten Einheitswurzeln. Sei $K \supset k$ eine Galoiserweiterung mit zyklischer Gruppe $\mathrm{Gal}(K,k) = \mathbb{Z}/(q)$. Dann gibt es ein $u \in k$, so daß K alle Lösungen der Gleichung $z^q - u = 0$ enthält und von jeder solchen Lösung erzeugt wird, d.h.

$K = k(z)$ für alle z mit $z^q - u = 0$.

Außerdem gibt es einen Isomorphismus

$\rho : \mathrm{Gal}(K,k) \longrightarrow \mu_q$,

so daß $\sigma(z) = \rho(\sigma^{-1}) \cdot z$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K,k)$ und z mit $z^q - u = 0$.

Gleichungen der Form $z^q - u = 0$ wurden früher als "reine Gleichungen" und z als "Lagrangesche Resolvente" bezeichnet.

Während für ein Polynom P des Grades 2, 3 oder 4 die Galoisgruppe als Untergruppe der auflösbaren symmetrischen Gruppe S_2, S_3 oder S_4 ebenfalls auflösbar und somit die Gleichung $P(x) = 0$ durch Radikale lösbar ist, begegnen wir im Fall eines Grades $n \geq 5$ den einfachen Gruppen A_n und den somit nicht auflösbaren Obergruppen S_n (mit Kompositionsreihe $S_n \supset A_n \supset \{1\}$) . So tritt S_n als Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(P,\mathbb{Q}(a_1, \dots ,a_n))$ der allgemeinen Gleichung n–ten Grades

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

mit algebraisch unabhängigen Koeffizienten $a_1, \dots ,a_n$ auf. Aber auch für die "meisten" Polynome n–ten Grades P mit rationalen Koeffizienten gilt $\mathrm{Gal}(P,\mathbb{Q}) = S_n$. Beispiele für rationale Polynome 5. Grades mit Galoisgruppe A_5 oder S_5 sind solche, die irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind und die genau drei reelle Nullstellen besitzen, wie z. B. das Polynom

$$x^5 - 10x - 2 \qquad \text{(vgl. Artin [1968 Satz 46])}.$$

Die Existenz von Gleichungen, die nicht mit Hilfe von Radikalen gelöst werden können, wirft die folgende natürliche Frage auf: Mittels welcher zusätzlicher Funktionen lassen sich die Wurzeln dieser Gleichungen in den Gleichungskoeffizienten oder – allgemeiner – in Elementen des Grundkörpers darstellen? Natürlich möchte man mit möglichst wenigen und zudem wohlverstandenen Funktionen auskommen. In Anbetracht des weiter oben beschriebenen Reduktionsprozesses genügt es, diese Frage für Gleichungen mit einfacher Galoisgruppe zu stellen. Da eine Antwort im zyklischen Fall durch den Normalformsatz gegeben wird, stellt sich also, in etwas abstrakter Form, die Frage nach einer Normalform für Galoiserweiterungen $k \subset K$ mit gegebener (einfacher, nichtabelscher) Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K,k)$.

In seinem "Ikosaederbuch" beschäftigt sich Klein mit dieser Frage für den Fall, daß G isomorph zur einfachen Gruppe A_5 und somit isomorph zur Ikosaedergruppe ist (vgl. I, 1, § 8). In diesem Fall können wir nämlich K als den Zerfällungskörper einer Gleichung fünften Grades über k interpretieren. Es genügt dazu ein Element $x \in K \backslash k$ zu finden, das von einer zu A_4 isomorphen Untergruppe von G fixiert wird. Dieses Element erfüllt dann eine irreduzible Gleichung fünften Grades

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

mit Koeffizienten $a_i \in k$, und die Konjugierten $x_1 = x, x_2, \dots, x_5$ von x erzeugen K über k. Die Rolle der durch Radikale auflösbaren reinen Gleichungen wird in Kleins Theorie von der sogenannten "Ikosaedergleichung" eingenommen, deren Definition wir etwas ausführlicher erläutern wollen.

2. Die Ikosaedergleichung

Umschreiben wir einem regulären Ikosaeder eine Sphäre S^2 , die wir mittels der stereographischen Projektion als Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auffassen, so werden die Rotationen der Ikosaedergruppe G durch gebrochen lineare Transformationen

$$z\,A \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad , z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ,$$

realisiert. Klein fixiert das Ikosaeder so, daß seine Eckpunkte die Koordinaten

$$z = 0,\infty,\varepsilon^{\nu}(\varepsilon + \varepsilon^4) \ , \ \ \varepsilon^{\nu}(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \ ,$$

$\nu = 0,1,2,3,4$, $\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$, erhalten. Die Koeffizienten a,b,c,d lassen sich dann als Elemente des Körpers $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ wählen. Wir erhalten somit eine Einbettung von G in die projektive lineare Gruppe $PGL_2(\mathbb{Q}(\varepsilon))$ über $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ (vgl. I, 2, § 6).

Wir betrachten nun den Raum der Bahnen $\mathbb{P}^1/G$ von G auf $\mathbb{P}^1$. Dieser identifiziert sich wiederum mit einer komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$, und die natürliche Quotientenabbildung $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ ist ein über $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ definierter Morphismus algebraischer Varietäten. Die Abbildung q realisiert eine verzweigte Überlagerung vom Grad 60. Verzweigungen treten dabei genau in den Punkten der Zahlenkugel auf, die den Seitenmittelpunkten, den Kantenmittelpunkten und den Eckpunkten des Ikosaeders entsprechen. Auf dem Bahnenraum $\mathbb{P}^1/G \cong \mathbb{P}^1$ fixiert Klein eine inhomogene Koordinate u (bei ihm mit Z bezeichnet), so daß die Bilder der singulären Bahnen in entsprechender Reihenfolge $0,1,\infty$ sind. Aufgrund dieser Fixierungen läßt sich nun die Gestalt der Abbildung

$$q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G \quad , \; z \longmapsto u$$

explizit bestimmen. Bezüglich homogener Koordinaten z_1 , z_2 , $z = z_1/z_2$, schreibt sich q als ein Quotient

$$u = q(z) = \frac{P(z_1,z_2)}{Q(z_1,z_2)}$$

von homogenen Polynomen P , Q des Grades 60, die invariant unter der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$, dem Urbild von $G \subset PGL_2(\mathbb{Q}(\varepsilon))$ in $SL_2(\mathbb{Q}(\varepsilon))$, sind. Zudem muß P (bzw. Q , bzw. $Q-P$) proportional zur dritten (bzw. fünften, bzw. zweiten) Potenz einer Form H (bzw. f , bzw. T) sein, die genau in den Seitenmittelpunkten (bzw. Eckpunkten, bzw. Kantenmittelpunkten) des Ikosaeders einfach verschwindet. Solche Formen lassen sich ausgehend von f leicht bestimmen (vgl. I, 2, § 13 und § 14):

$$f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) ,$$

$$H = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10} ,$$

$$T = (z_1^{30} + z_1^{30}) + 522(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10\,005(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20}) .$$

Wir erhalten damit schließlich

$$q(z) = \frac{H(z_1;z_2)^3}{1728\ f(z_1,z_2)^5} = \frac{H(z,1)^3}{1728\ f(z,1)^5} \quad ,$$

und der Bedingung $q(z) = u$ entspricht nun eine Gleichung vom Grade 60, die sogenannte Ikosaedergleichung

$$((z^{20} + 1) - 228(z^{15} - z^5) + 494z^{10})^3 + 1728uz^5(z^{10} + 11z^5 - 1)^5 = 0 \, .$$

3. Die Auflösung der Ikosaedergleichung

So wie die Auflösung einer "reinen" Gleichung $z^n - u = 0$, d.h. die Berechnung einer n–ten Wurzel von u, $u \in \mathbb{C}$, ein gut verstandener und einfacher analytischer Prozeß ist, wird man ähnliches von der Auflösung der Ikosaedergleichung verlangen. Für Klein standen dazu zwei Methoden zur Verfügung. Im Anschluß an eine Arbeit von H.A. Schwarz [1873] läßt sich die (lokale) Umkehrfunktion zu $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ als Quotient zweier Lösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z'' + \frac{(\alpha+\alpha'-1)+(\beta+\beta'+1)u}{u(u-1)}\,z' + \frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')u+\beta\beta' u^2}{u^2(u-1)^2}\,z = 0$$

mit dem Exponentendatum $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/10 & 1/4 \\ -1/6 & -1/10 & 3/4 \end{bmatrix}$ schreiben. Daher ist dieselbe als Quotient hypergeometrischer Reihen

$$F(a,b,c;u) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}\,u + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1(1+1)c(c+1)}\,u^2 + \ldots$$

mit geeigneten $a,b,c \in \mathbb{Q}$ darstellbar.

Eine indirektere, aber historisch umso bedeutsamere Lösung der Ikosaedergleichung ist die mittels elliptischer Integrale und Modulfunktionen. Wir wollen diese Methode etwas genauer beschreiben, da ihr Klein im "Ikosaederbuch" nur wenig Raum schenkt. Sei $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ die obere Halbebene der komplexen Zahlen und $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\langle \pm 1 \rangle$ die "volle Modulgruppe". Diese operiert eigentlich diskontinuierlich auf H durch gebrochene lineare Transformationen

$$\tau \longrightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\ , \quad \tau \in H\ , \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\ ,$$

und die natürliche Quotientenabbildung

$$H \longrightarrow H/\Gamma$$

wird durch die Dedekind–Kleinsche J–Funktion

$$J : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$J(\tau) = \frac{1}{1728}\left(\frac{1}{q} + 744 + 196884q + ...\right)\ , \quad q = e^{2\pi i\tau}\ ,$$

realisiert (vgl. dazu wie auch im folgenden die später genannten Werke von Klein und Fricke sowie als neuere Referenz Serre [1970 Chap. VII]). Sei $\Gamma(5) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; a{-}1 \equiv b \equiv c \equiv d{-}1 \equiv 0(5) \right\}$ die Hauptkongruenzuntergruppe fünfter Stufe. Dann ist die Quotientengruppe $\Gamma/\Gamma(5) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5)$ isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 und somit zur Isokaedergruppe G (ersteres wurde bereits 1831 von Galois erkannt). Zudem läßt sich die natürliche Aktion dieser Gruppe auf dem Quotientenraum $H/\Gamma(5)$ mit der Aktion der Ikosaedergruppe auf der Riemannschen Zahlenkugel, aus der die zwölf Ikosaederecken entfernt wurden, identifizieren. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "J_5"] \arrow[dr, "J"'] & H/\Gamma(5) \arrow[r, hook] \arrow[d, "q'"] & \mathbb{P}^1 \arrow[d, "q"] \\ & H/\Gamma \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1/G\ . \end{tikzcd}$$

Hier bezeichnet q' die Einschränkung von q und J_5 den sogenannten Hauptmodul fünfter Stufe, der sich explizit als Quotient zweier Thetareihen ausdrücken läßt (vgl. I, 5, § 7, Formel (20)). Um die Ikosaedergleichung $q(z) = u$ zu lösen, kann man nun so vorgehen, daß man zuerst die "Modulgleichung" $J(\tau) = u$ löst und dann $z = J_5(\tau)$ setzt. Die Auflösung der Modulgleichung ist dabei eine vertraute Aufgabe aus der Theorie der elliptischen Kurven. Dazu sei an die Rolle der J–Funktion in dieser Theorie erinnert. Jede komplexe elliptische Kurve E läßt sich analytisch als Quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ von $\mathbb{C}$ nach dem Periodengitter

$$\Lambda = \{ \int_\gamma \omega \mid \gamma \in H_1(E,\mathbb{Z})\}$$

einer holomorphen 1–Form $\omega \neq 0$ auf E realisieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dabei Λ in der Gestalt $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ für ein $\tau \in H$ annehmen. Zwei verschiedene $\tau, \tau' \in H$ liefern isomorphe Kurven $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ und $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ genau dann, wenn τ und τ' in der gleichen Bahn von Γ liegen, also die Werte $J(\tau)$ und $J(\tau')$ übereinstimmen. Daher heißt $J(\tau)$ die J–Invariante der elliptischen Kurve $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Ist E durch eine affine Gleichung in Weierstraß–Normalform

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

gegeben, so berechnet sich der Wert der J–Invarianten als $\dfrac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$. Zur Lösung der Modulgleichung $J(\tau) = u$ bestimmt man zunächst eine elliptische Kurve E mit J–Invariante u, z.B. indem man $g_2 = g_3 = \frac{27u}{u-1}$ setzt. Dann ist das Verhältnis $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ zweier primitiver Perioden

$$\omega_i = \int_{\gamma_i} \frac{dx}{y} = \int_{\gamma_i} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \frac{27u}{u-1}(x+1)}}\ , \quad \{\gamma_1, \gamma_2\} \text{ eine Basis von } H_1(E_1,\mathbb{Z})\ ,$$

eine Lösung von $J(\tau) = u$.

Während Klein den Zusammenhang der hypergeometrischen Differentialgleichungen mit der Auflösung der Ikosaedergleichung bis zur Erstellung der expliziten Differentialgleichungen in Kapitel I 3 des "Isokaederbuches" entwickelt, verzichtet er auf die expliziten Reihendarstellungen, die man jedoch in seiner Arbeit [1877 I § 8] finden kann. In umfassenderer Perspektive hat Klein das Thema der hypergeometrischen Funktionen in seinen diesbezüglichen Vorlesungen von 1893/94 (hrsg. von O. Haupt, Klein [1933]) wieder aufgegriffen. Die elliptischen Modulfunktionen berührt Klein nur in wenigen Angaben (siehe I 5, §§ 6–9, II 1, § 3), denn schon bei der Arbeit am Ikosaederbuch hatte er die Abfassung eines separaten Buches über diesen Gegenstand geplant (vgl. die Vorrede). Dieser Plan wurde später in den von R. Fricke ausgearbeiteten Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen, Klein–Fricke [1890], [1892], realisiert.

Die Lösung der Modulgleichung $J(\tau) = u$ läßt sich übrigens auch mittels hypergeometrischer Reihen bewerkstelligen, da die Perioden ω_i (nach geeigneter "Umnormierung") als Funktionen von u eine hypergeometrische Differentialgleichung erfüllen. Dies rückt die Modulgleichung näher an die Ikosaedergleichung. Mehr dazu findet man in dem genannten Werk von Klein–Fricke [1890], Kapitel I2 und I3. Explizite Formeln werden z.B. in Klein [1878_a] und Fricke [1926] I4, § 5 angegeben.

4. Kleins Hauptresultat

Das Hauptziel des "Ikosaederbuchs" ist der Nachweis, daß sich die Lösung einer Gleichung fünften Grades auf die Lösung einer Isokaedergleichung reduzieren läßt. Der zweite Abschnitt des Buches widmet sich diesem Nachweis, wobei die Reduktion explizit durchgeführt wird. Die bloße Möglichkeit der Reduktion läßt sich in zeitgemäßer und präziser Form durch den folgenden Normalformsatz für ikosaedrale Erweiterungen ausdrücken, der in fast vollständiger Analogie zu dem Normalformsatz für zyklische Erweiterungen steht.

Satz Sei $k \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper der komplexen Zahlen, der die Gruppe μ_5 der fünften Einheitswurzeln enthalte, und sei $K \subset \mathbb{C}$ eine Galoiserweiterung von k mit Gruppe $\mathrm{Gal}(K,k) \cong A_5$.

Nach gegebenenfalls erforderlicher Ersetzung von k (und entsprechend von K) durch eine quadratische Erweiterung gibt es ein $u \in k$, so daß K von jeder Lösung der Ikosaedergleichung $q(z) = u$ erzeugt wird.

Außerdem gibt es zu jeder Lösung z von $q(z) = u$ einen Isomorphismus

$$\rho : \mathrm{Gal}(K,k) \xrightarrow{\sim} G \subset \mathrm{PGL}_2(k) \quad , \rho(\sigma) = \begin{bmatrix} a(\sigma) & b(\sigma) \\ c(\sigma) & d(\sigma) \end{bmatrix}$$

der Galoisgruppe auf die Ikosaedergruppe G in $\mathrm{PGL}_2(k)$, so daß

$$\sigma^{-1}(z) = \rho(\sigma)(z) = \frac{a(\sigma)z + b(\sigma)}{c(\sigma)z + d(\sigma)}$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K,k)$.

Die Analogie zum Satz für zyklische Erweiterungen ist hier nicht vollständig aufgrund der gegebenenfalls erforderlichen Ersetzung von k durch eine quadratische Erweiterung $k' \subset \mathbb{C}$. Da $\mathrm{Gal}(K,k)$ keine Untergruppe vom Index 2 enthält, ist k' nicht in K enthalten, und es gilt $\mathrm{Gal}(K.k',k') \cong \mathrm{Gal}(K,k)$. Eine solche Erweiterung oder eine die Erweiterung erzeugende Quadratwurzel nannte Klein "akzessorisch". Kronecker hatte schon 1861 behauptet, daß die Heranziehung dieser akzessorischen Erweiterung unvermeidbar ist, wenn man allgemeine Gleichungen fünften Grades auf Gleichungen mit nur einem Parameter (wie die Ikosaedergleichung) reduzieren will. Ein erster Beweis dazu wurde von Klein im Jahre 1877 erbracht. Eine Modifikation dieses Beweises schließt das "Ikosaederbuch" ab (II 5, §§ 9, 10, 11). Vom modernen Standpunkt aus ist die Forderung der Einbettung von k und K in den Körper der komplexen Zahlen unnötig. Wir haben sie nur beibehalten, um den Anschluß an Kleins Situation zu bewahren, in der die Ikosaedergleichung durch transzendente Verfahren lösbar ist.

Im folgenden werden wir ein erzeugendes Element z wie im obigen Satz als Ikosaedersolvente für die Erweiterung $k \subset K$ bezeichnen. (Diese Terminologie folgt R. Fricke [1924 III 4 § 16]; entsprechend reservieren wir den Namen Ikosaederresolvente für die Gleichung $q(z) - u = 0$.)

Ein konstruktiver Beweis des Normalformsatzes ist einer der wesentlichen Schritte in Kleins effektiver Reduktion der Lösung der Gleichungen fünften Grades auf die Lösung der Ikosaedergleichung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir K als Zerfällungskörper eines Polynoms fünften Grades

$$P(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 ,$$

$a_1,\dots,a_5 \in k$, ansehen. Sind dann $x_1,\dots,x_5$ die Wurzeln von P , so gilt $K = k(x_1,\dots,x_5)$, und $\mathrm{Gal}(K,k)$ identifiziert sich mit der Gruppe der geraden Vertauschungen dieser Wurzeln. Zur Vereinfachung nehmen wir vorerst die Gleichung $P(x) = 0$ als "allgemein" an, d.h. wir beschränken unsere Betrachtung auf den Fall, daß $K = \mathbb{Q}(\mu_5)\ (x_1,\dots,x_5)$ der Körper der rationalen Funktionen in fünf Unbestimmten $x_1,\dots,x_5$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\mu_5)$ ist. Dann ist $k = \mathbb{Q}(\mu_5)\ (a_1,\dots,a_5, \sqrt{d}\,)$ der Unterkörper von K , der über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ von den elementarsymmetrischen Funktionen $a_1,\dots,a_5$ der x_i und von der Wurzel

$$\sqrt{d} = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

der Diskriminante d von P erzeugt wird. Das Kleinsche Reduktionsverfahren beruht nun auf den folgenden drei Konstruktionen:

I. Nach Ersetzung von k durch eine akzessorische Erweiterung, die z.B. durch eine Quadratwurzel $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{Q}[a_1,\dots,a_5] \subset k$, erzeugt werden kann, gibt Klein eine explizite Ikosaedersolvente $z \in \mathbb{Q}(\mu_5)\ (x_1,\dots,x_5, \sqrt{a})$ an. (Daraus erhält man einen konstruktiven Beweis des Normalformsatzes, auch im allgemeinen Fall.)

II. Da die Quotientenabbildung $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ invariant bezüglich der Ikosaedertransformationen ist, muß das Element $u = q(z) = H(z,1)^3/1728\, f(z,1)^5$ invariant unter $\mathrm{Gal}(K,k)$ sein, also in k liegen. Klein bestimmt u als explizites Element von $k = \mathbb{Q}(\mu_5)\ (a_1,\dots,a_5, \sqrt{d}, \sqrt{a})$.

III In Umkehrung zu I konstruiert Klein fünf rationale Funktionen $X_i \in k(Z)$, $i = 1,\dots,5$, so daß $x_i = X_i(z)$ für alle i .

Wir können nun den von Klein vorgeschlagenen Weg für die Lösung einer Gleichung fünften Grades

$$P(x) = x^5 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $\alpha_1,\dots,\alpha_5$ skizzieren. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen, die erst an expliziten Formeln festzumachen sind, nehmen wir die Koeffizienten α_i als genügend allgemein an. Dann erweisen sich die im folgenden beschriebenen Substitutionen als durchführbar. Klein selbst diskutiert auch nur diesen allgemeinen Fall bis zu Ende. Zunächst ordnet man der Gleichung $P(x) = 0$ eine Ikosaedergleichung $q(z) = \beta$ zu, wobei sich $\beta \in \mathbb{P}^1$ durch die Substitution $a_i \longrightarrow \alpha_1$ aus dem Element u der Konstruktion II ergibt. Mittels analytischer Methoden läßt sich nun eine Lösung z der Ikosaedergleichung $q(z) = \beta$ angeben. Schließlich erhält man die Wurzeln $x_1,\dots,x_5$ von $P(x)$ aus den rationalen Funktionen X_i der Konstruktion III durch die Substitution $X \longrightarrow z$, $a_1 \longrightarrow \alpha_i$.

5. Kleins geometrischer Zugang

Die im vorigen Abschnitt aufgeführten Konstruktionen werden von Klein auf dem Hintergrund einer geometrischen Interpretation durchgeführt. Zur Illustration seines Vorgehens wollen wir jetzt einige der Ideen skizzieren, die dem im Kapitel II 3 eingeschlagenen Lösungsweg zugrundeliegen. Bei diesem Weg startet Klein von einer Gleichung fünften Grades, die bereits die Gestalt einer "Hauptgleichung"

$$y^5 + ay^2 + by + c = 0$$

hat, oder – mit anderen äquivalenten Worten –, für die sowohl die Summe der Wurzeln als auch die Summe der Quadrate der Wurzeln verschwinden:

$$\text{(H)} \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0 \ .$$

Gegebenenfalls unter Benutzung einer akzessorischen Quadratwurzel läßt sich jede Gleichung fünften Grades mittels Tschirnhaustransformationen in diese Form bringen (vgl. II 1 § 2, II 2 §§ 5,6, II 5 § 2, es ist danach auch keine weitere akzessorische Adjunktion erforderlich).

Grundlegend für Kleins geometrisches Vorgehen ist die Interpretation der fünf Wurzeln $x_1,\dots,x_5$ einer Gleichung fünften Grades als homogene Koordinaten eines Punktes im vierdimensionalen komplex–projektiven Raum $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^5)$ (die triviale Gleichung $x^5 = 0$ dürfen wir getrost vergessen). Auf diesem Raum operiert die symmetrische Gruppe S_5 durch Vertauschung der Koordinaten. Diese Aktion ist über $\mathbb{Q}$ definiert.

Einer einzelnen Gleichung entsprechen im allgemeinen 120 Punkte, die aus allen möglichen Anordnungen der fünf Wurzeln $x_1,\dots,x_5$ hervorgehen. Die Wurzelquintupel $(y_1:\dots:y_5)$ einer Hauptgleichung $P(y)=0$ unterliegen den obigen Bedingungen (H) und liegen dementsprechend auf einer nichtsingulären, zweidimensionalen, über $\mathbb{Q}$ definierten Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^4$:

$$Q = \left\{ (y_1:\dots:y_5) \in \mathbb{P}^4 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0 \right\}$$

$$\cap$$

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ (y_1:\dots:y_5) \in \mathbb{P}^4 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} y_i = 0 \right\},$$

Die zwei Regelscharen auf einer solchen Quadrik liefern bekanntlich einen Isomorphismus

$$Q \cong \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)} ,$$

der in unserem Fall über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definiert ist. Die Gruppe S_5 überführt Q in sich. Dabei vertauschen die ungeraden Permutationen die Regeln beider Scharen, während die Gruppe A_5 jede der Scharen in sich überführt. Also gibt es Aktionen von A_5 auf $\mathbb{P}^1_{(1)}$ und $\mathbb{P}^1_{(2)}$, so daß das Produkt $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$ mit der Diagonalaktion A_5–isomorph zu Q wird. Bis auf die Einführung geeigneter Koordinaten auf den projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{(i)}$ identifizieren sich die Bilder von A_5 in $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{(i)})$ mit der "Standard"–Ikosaedergruppe. Beide Aktionen sind jedoch nicht linear äquivalent. Sie gehen durch einen nichttrivialen äußeren Automorphismus von A_5 auseinander hervor. (Solche Automorphismen werden durch Konjugation mit Elementen aus $S_5 \backslash A_5$ induziert!) Sei nun

$$\tilde{Q} = \left\{ (y_1,\dots,y_5) \in \mathbb{C}^5\setminus\{0\} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0 \right\}$$

und

$$\zeta_i : \tilde{Q} \longrightarrow Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(i)}\,, \qquad i = 1,2\,,$$

die A_5–äquivariante und über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definierte Komposition der natürlichen Abbildung $\tilde{Q} \longrightarrow Q$ und der i–ten Projektion $Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(i)}$. Dann liefert ζ_i eine Ikosaedersolvente für die allgemeine Hauptgleichung. In den expliziten Formeln unterscheiden sich ζ_1 und ζ_2 nur durch das Vorzeichen vor der Wurzel aus der Diskriminante.

Auf die nötigen Rechnungen zur Bestimmung des Elementes u in der Konstruktion II gehen wir nicht ein. Sie ist bei Klein verwoben mit den Rechnungen zur Konstruktion III, d.h. zur Rekonstruktion der Wurzeln der Gleichung fünften Grades aus der Ikosaedersolvente (vgl. II 3 § 5). Wir wollen nur die geometrische Idee dieser Rekonstruktion beschreiben. Zur Darstellung der fünf Wurzeln mittels der zugehörigen Ikosaedersolvente benötigen wir fünf rationale Funktionen auf $\mathbb{P}^1$ oder zunächst fünf binäre Formen, die gerade permutiert werden, wenn auf ihr Argument eine Transformation der (binären) Ikosaedergruppe ausgeübt wird. Diese werden von der Geometrie des Ikosaeders geliefert. Der Isomorphismus der Ikosaedergruppe G mit der alternierenden Gruppe A_5 wird nämlich realisiert durch die Aktion von G auf fünf dem Ikosaeder einbeschriebenen Oktaedern, deren Eckpunkte genau die $30 = 5 \times 6$ Kantenmittelpunkte erschöpfen (vgl. I 1 § 8, wo Klein anstelle der Oktaeder von rechtwinkligen Tripeln von Querlinien redet). Jedem dieser fünf Oktaeder entspricht eine im wesentlichen eindeutige binäre Form 6. Grades t_ν, $\nu = 1,\dots,5$, die genau in den sechs Eckpunkten des Oktaeders verschwindet. Bei geeigneter Normierung werden diese fünf Formen von der (binären) Ikosaedergruppe in gerader Weise permutiert. Ähnliches gilt von den Hesseschen Formen 8. Grades W_ν der t_ν. Ihre Nullstellen auf $\mathbb{P}^1$ repräsentieren jeweils die acht Eckpunkte eines zu einem Oktaeder dualen Würfels. Klein betrachtet nun die bihomogene, über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definierte Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 && \longrightarrow \mathbb{C}^5 \\ &((z_1,z_2),(m,n)) && \longrightarrow (y_1,\dots,y_5)\ , \\ &y_\nu = mT(z_1,z_2)W_\nu(z_1+z_2) + nf^2(z_1,z_2)t_\nu(z_1,z_2)W_\nu(z_1,z_2)\ . \end{aligned}$$

Hierbei sind T und f die Invarianten der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$ vom Grade 30 und 12. Diese Abbildung induziert aufgrund ihrer Homogenität eine rationale Abbildung

$$\eta : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^4$$

$$((z_1:z_2),\ (m:n)) \longrightarrow (y_1: \dots :y_5)$$

deren "Bild" mit der Quadrik Q übereinstimmt (II 3 § 4). Wie man leicht sieht, genügt zur Berechnung der Wurzeln $y_1,\dots,y_5$ einer (nichttrivialen) Hauptgleichung die Konstruktion eines entsprechenden Punktes $(y_1: \dots :y_5) \in Q \subset \mathbb{P}^4$. Sei z die Ikosaedersolvente einer solchen Hauptgleichung. Mittels invariantentheoretischer Methoden bzw. eines Koeffizientenvergleichs bestimmt Klein (in II 3 § 5) Koeffizienten m,n (in rationaler Abhängigkeit von den Koeffizienten a,b,c und der Wurzel aus der Diskriminante der ursprünglichen Gleichung), so daß $\eta((z:1),\ (m:n)) = (y_1: \dots :y_5)$, wobei $y_1,\dots,y_5$ die Wurzeln der Gleichung sind.

6. Der Aufbau des "Ikosaederbuches"

Da Klein selbst keine zusammenfassende inhaltliche Übersicht über sein Buch gegeben hat, mag es nach den obigen mathematischen Ausführungen nützlich sein, kurz etwas über Inhalt und Stellung der einzelnen Kapitel des Buches zu sagen. Dieses besteht aus zwei Abschnitten zu je fünf Kapiteln. Während sich der zweite Abschnitt ausschließlich mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades auseinandersetzt, behandelt der mehr vorbereitende erste Abschnitt Konstruktionen und Fragen, die für alle regulären Körper sinnvoll sind, wobei dem Ikosaeder aufgrund der späteren Anwendungen gelegentlich besondere Beachtung widerfährt.

So führt das erste Kapitel I 1 die Polyedergruppen als Symmetriegruppen der regulären Körper ein. Es untersucht Untergruppen, Konjugationsklassen, natürliche Isomorphismen, Triangulation und Fundamentalbereich auf der dem Polyeder umbeschriebenen Kugel sowie die Erzeugung der Gruppen durch spezielle Elemente.

Im zweiten Kapitel I 2 wird die einem Polyeder umbeschriebene Kugel als Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bzw. als projektive Gerade $\mathbb{P}^1$ interpretiert. Für die jetzt mittels gebrochen linearer Transformationen operierenden Polyedergruppen G gibt Klein explizite Matrixrealisationen an. In diesem Zusammenhang treten auch die binären Polyedergruppen $\hat{G}$ als Urbilder der Gruppen G unter dem natürlichen Homomorphismus $SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ auf. Das wichtigste Resultat des Kapitels ist die explizite Beschreibung der Quotientenabbildung $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ mittels invarianter binärer Formen.

Ziel des dritten Kapitels I 3 ist die funktionentheoretische Untersuchung der von Klein so benannten Fundamentalaufgabe, die in der (lokalen) Umkehrung der Abbildung $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ oder der Lösung der entsprechenden einparametrigen "Polyedergleichung" vom Grade $|G|$ (= Ordnung von G) besteht. Neben einer geometrischen Beschreibung der verzweigten Überlagerung q erstellt er eine Differentialgleichung dritter Ordnung für die Umkehrfunktion. Letztere läßt sich als Quotient von Fundamentallösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung realisieren. Gleichzeitig betrachtet Klein hier auch das bei diesen Entwicklungen natürlich auftretende "Formenproblem" für die binären Polyedergruppen. In Analogie zur Fundamentalaufgabe bezieht sich dieses auf die (lokale) Umkehr der binären Quotientenabbildung $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2/\hat{G}$.

Das vierte Kapitel I 4 analysiert die Fundamentalaufgaben, d.h. die Lösung der Polyedergleichungen vom algebraischen Standpunkt der Galoisschen Theorie. Aus moderner Sicht geht es dabei um die Untersuchung der Körpererweiterung $K^G \subset K$, bei der K der Funktionenkörper der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1$ über dem Konstantenkörper $\mathbb{Q}(\mu_n)$ (n passend, d.h. $n = 5$ im Ikosaederfall) und K^G der Fixkörper unter der auf K operierenden Polyedergruppe G ist. Nach einem zeitgenössischen Abriß der Galoisschen Theorie beschreibt Klein relevante Zwischenkörper durch erzeugende Elemente und ihre minimalen Gleichungen über K^G ("Resolventen"). Wegen der späteren Anwendungen finden dabei die Resolventen fünften (und sechsten) Grades der Ikosaedergleichung besondere Beachtung.

Der erste Abschnitt des Buches wird durch das Kapitel I 5 abgeschlossen, das zunächst die bisherigen Entwicklungen mit allgemeineren oder verwandten Fragestellungen in Beziehung setzt (Klassifikation der endlichen Untergruppen von $PGL_2(\mathbb{C})$, Formenprobleme und deren Reduktion für beliebige endliche oder diskrete

Gruppen) und dann die Lösung der Polyedergleichungen durch elliptische Integrale und Modulfunktionen skizziert.

Das Kapitel II 1 leitet den zweiten Abschnitt des Buches mit einer historischen Übersicht ein, in der Klein die transzendenten und algebraischen Aspekte der Lösungen der Gleichungen fünften Grades durch Hermite, Brioschi und Kronecker skizziert. Gleichzeitig dient es als thematische Vorbereitung auf die systematischen Entwicklungen der folgenden Kapitel.

Allerdings besitzt auch noch das Kapitel II 2 vorbereitenden Charakter, indem es Kleins geometrische Interpretation gleichungstheoretischer Situationen und Konstruktionen ("Bilder von Gleichungen", "Tschirnhaustransformationen", "Resolventen") vorstellt. Dabei führen die Verhältnisse bei Gleichungen fünften Grades praktisch unmittelbar auf die Geometrie des dreidimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^3$ und seiner Untervarietäten. So schließt das Kapitel auch mit einer detaillierten Diskussion der Graßmannvarietät aller Geraden des $\mathbb{P}^3$ sowie der linearen Erzeuger auf einer nichtsingulären Quadrik.

Nach Kleins eigenen Worten erreichen wir in Kapitel II 3 den Mittelpunkt des "Ikosaederbuches". Hier führt er die von uns im obigen Abschnitt "5. Kleins geometrischer Zugang" skizzierte Lösungstheorie der Hauptgleichungen fünften Grades in jeder Einzelheit durch. Nach einer ersten elementaren, aber kunstvollen Methode erläutert er auch einen begrifflicheren, invariantentheoretischen Zugang, der auf Gordan zurückgeht. Abschließend geht er von dem gewonnenen Standpunkt auf die Bring–Jerrard–Normalform and Hermites Lösungsmethode ein.

Von seiner unmittelbaren Zielsetzung her entfernt sich das Kapitel II 4 wieder von den Gleichungen fünften Grades. Es behandelt die Reduktion eines "Formenproblems", d.h. des Problems der Umkehr eines ternären Ikosaederquotienten $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3/G$, auf die Lösung der Ikosaedergleichung. Zu diesem Zweck entwickelt Klein die Invarianten– und (einen Teil der) Kovariantentheorie der ternären Ikosaedergruppe (vgl. vor allem §§ 2,3 bzw. 8,9,10). Die Motivation für diese Entwicklungen liegt in den seinerzeit bereits erschienenen Arbeiten Brioschis und Kroneckers, in denen die sogenannten Jacobischen Gleichungen sechsten Grades, als Resolventen von Gleichungen fünften Grades, eine zentrale Rolle spielen. Klein zeigt, daß das Problem der Lösung dieser Gleichungen im wesentlichen äquivalent zum obigen Formenproblem ist (§ 6). Brioschis Resolventen fünften Grades der Jacobischen Gleichungen ordnen sich ebenfalls auf natürliche und geometrisch höchst interessante Weise ein. Insgesamt liefert dieses Kapitel viele Anknüpfungen an reiche geometrische Strukturen, auf die Klein aber nicht immer voll eingeht. Ebenfalls fallen die Formeln zur Reduktion des Formenproblemes etwas weniger detailliert aus als im vorhergehenden Kapitel.

Das letzte Kapitel II 5 kann sich nun auf die vorangegangenen stützen, um allgemeine Gleichungen fünften Grades auf die Ikosaedergleichung zu reduzieren. Dazu stehen zwei Methoden zur Verfügung. Einmal läßt sich jede Gleichung fünften Grades durch Tschirnhaustransformation in eine Hauptgleichung verwandeln und dann gemäß den Prinzipien von Kapitel II 3 behandeln. Zudem zeigt Klein jetzt mittels liniengeometrischer Konstruktionen, daß sich die Gleichungen fünften Grades auf das Formenproblem des Kapitels II 4 reduzieren lassen, welches dort bereits auf die Ikosaedergleichung zurückgeführt war. Eine eingehende Analyse erhellt die innere Verwandtschaft beider Methoden, deren Differenz letztlich auf der verschiedenen Anordnung fundamentaler Schritte, wie der Einführung einer akzessorischen Quadratwurzel, beruht. Die Benutzung einer solchen Wurzel erweist sich im allgemeinen Fall als unvermeidlich, und diese Tatsache ermöglicht Klein zum Abschluß des Buches den Beweis einer Behauptung Kroneckers, nach der es keine einparametrige rationale Resolvente für die allgemeine Gleichung fünften Grades geben kann.

Anmerkungen zum Text

Seite VIII; Zeile –1: Weitere Druckfehlerberichtigungen

S. 12, Fußnote *):	$\nu' \equiv c\nu + k(\mathrm{mod.}n)$
S. 42, 9:	$\mu + \nu \equiv 0$
S. 48, Formel (35):	$z_1^{\alpha} z_2^{\beta} \cdot \prod_i (\lambda_1^{(i)} z_1^n + \lambda_2^{(i)} z_2^n)$
S. 73, 11	von $\frac{1}{z}$ und eine rationale Funktion
S. 95, Fußnote **):	ergänze: adjungiert
S. 97, Formel (8):	Die Formel muß lauten: $\frac{-4Z_1}{(Z_1-1)^2} = Z$
S. 103, Formel (22):	Die Formel muß lauten: $t(z_1,z_2) = (\ldots)(z_1^2-2(\epsilon+\epsilon^4)z_1z_2-z_2^2)\cdot(\ldots)$
S. 105, Formel (29):	Die Formel muß lauten: $48\,u^5(\ldots)^2 - 40\,u^3(\ldots) + \ldots = 0$
S. 109, Formel (40):	die erste geschweifte Klammer soll sich nach rechts (und nicht nach links) öffnen.

S. 115, –2:	statt "werden" muß es "worden" heißen.
S. 117, –2:	statt "Seite von (3)" muß es "Seite von (2)" heißen.
S. 125, 3:	derjenigen
S. 154, Formel (30):	lautet korrekt: $f^{12} - 10\varphi \cdot f^6 + 5\varphi^2 = \psi \cdot f^2$.
S. 189, Formel (20):	$v_\nu = \frac{12 f \cdot W_\nu}{H}$.
S. 189, Formel (22):	$t_\nu W_\nu = (...)(...) + (\epsilon^{2\nu} z_1 + \epsilon^\nu z_2)(...)$
S. 198, 14:	der $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$
S. 208, 14:	als Funktionen der y'_ν berechnen
S. 234, Fußnote **):	in II, 1, § 5.
S. 236, 8:	Funktion mit $\sqrt{A}$ (50).

Kapitel I 1:

S. 5, 8: Diese Definition einer Gruppe ist natürlich unzureichend vom abstrakten Gesichtspunkt. Allerdings genügt sie, wenn man sie auf eine Teilmenge G einer umfassenden Transformationsgruppe Γ bezieht, deren Elemente $g \in G$

von endlicher Ordnung sind. Diese Situation liegt bei der sich anschließenden Untersuchung der Polyedergruppen vor.

S. 8, 1: Klein benutzt hier eine heute überholte Benennung für Homomorphismen von Gruppen, die bis zum Ende des 19. Jahrhunderts in Gebrauch war (vgl. z.B. Weber [1899]).

S. 28,14: Neben den Erzeugern kann man auch ergänzend die Relationen, also eine Präsentation, für die Polyedergruppen bestimmen. Bei Wahl geeigneter Erzeuger a,b,c ergibt sich für jede Polyedergruppe eine Präsentation

$$a^{\nu_1} = b^{\nu_2} = c^{\nu_3} = abc = 1 \quad ,$$

wobei (ν_1,ν_2,ν_3) das entsprechende "Platonische Tripel" aus der Tabelle von S. 21 ist. Im Fall der Ikosaedergruppe kann man etwa $c = S$, $b = S^2TS^2$ und $a = bc = S^2TS^3$ wählen. Für eine ausführlichere Erörterung vergleiche man Coxeter–Moser [1975], Lamotke [1986].

Der Stoff dieses Kapitels ist in vielen Variationen in zahlreichen Lehrbüchern reproduziert worden. Wir wollen hier nur drei "Klassiker" nennen, die u.a. denselben Gegenstand behandeln oder berühren: Weyl [1955], Coxeter [1973], Du Val [1964].

Kapitel I 2:

S. 32,2: In heutiger Terminologie lassen sich Kleins gruppentheoretische Betrachtungen in den Paragraphen 2 und 3 folgendermaßen umschreiben. Die Gruppe der (komplex–analytischen) Automorphismen der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ ist die projektive lineare Gruppe $PGL_2(\mathbb{C})$ aller gebrochenen linearen Transformationen

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, \ \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \ .$$

Man hat zwei exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & PGL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \cup & & \cup & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \langle \pm 1 \rangle & \longrightarrow & SL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & PGL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & 1\,. \end{array}$$

Durch die Drehungen auf der Zahlenkugel bettet sich die Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ der Rotationen des euklidischen $\mathbb{R}^3$ in die Gruppe $PGL_2(\mathbb{C})$ ein (u.a. als maximal kompakte Untergruppe). Klein bestimmt nun das Urbild von $SO_3(\mathbb{R})$ in $SL_2(\mathbb{C})$ und erhält dabei die spezielle unitäre Gruppe $SU_2(\mathbb{C})$ (Formeln (14), (16)). Die Gruppe $SU_2(\mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend, da topologisch eine 3–Sphäre (Formel (13)), und identifiziert sich mit der Spingruppe $Spin_3(\mathbb{R})$ zu $SO_3(\mathbb{R})$. In der zweiten Fußnote auf S. 36 beschreibt Klein ebenfalls den expliziten Isomorphismus von $SU_2(\mathbb{C})$ mit der Gruppe $\mathbb{H}_{(1)}$ der Hamiltonschen Quaternionen der Norm 1.

S. 36, 12: Hier führt Klein u.a. die "binären Polyedergruppen" $\hat{G} \subset SU_2(\mathbb{C})$ (oder $\hat{G} \subset SL_2(\mathbb{C})$) der Polyedergruppen $G \subset SO_3(\mathbb{R})$ ein. Durch Abänderung der Ausgangsposition der regulären Körper lassen sich die Koeffizienten der expliziten Matrixrealisationen weiter einschränken. So kann man z.B. die binäre Ikosaedergruppe mittels Quaternionen über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ realisieren (vgl. dazu Coxeter [1940], Du Val [1964 p. 53]; zudem erweist sich die binäre Ikosaedergruppe als Gruppe der Norm–Eins–Einheiten einer maximalen Ordnung der Quaternionen über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, vgl. dazu Tits [1980], Vignéras [1980]).

S. 46, –5: Die Unmöglichkeit der Liftung einer Vierergruppe $V \subset PGL_2(\mathbb{C})$ nach $GL_2(\mathbb{C})$ (und damit das entsprechende Resultät für alle V enthaltenden Obergruppen) läßt sich auch so begründen. Bis auf Konjugation gibt es in $GL_2(\mathbb{C})$ nur eine zu V isomorphe Gruppe, die aus den Matrizen $\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ besteht. Das Bild dieser Gruppe in $PGL_2(\mathbb{C})$ ist jedoch keine Vierergruppe, sondern nur isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ersetzt man $GL_2(\mathbb{C})$ durch $SL_2(\mathbb{C})$, so kann man noch einfacher argumentieren, da diese Gruppe nur ein Element der Ordnung zwei besitzt, nämlich $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Für alle Polyedergruppen G liefert daher die Sequenz

$$1 \longrightarrow \langle \pm 1 \rangle \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

eine nichttriviale zentrale Erweiterung $\hat{G}$ von G durch $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ist G eine Ikosaedergruppe (oder auch eine Tetraedergruppe oder eine Diedergruppe mit "n ungerade"), dann ist eine solche Erweiterung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In der Terminologie der Gruppenkohomologie wird dies durch die Aussage $H^2(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ausgedrückt.

S. 47, 13: Im heutigen Sprachgebrauch verlangt man von einer invarianten Form, daß sie vollkommen ungeändert bleibt, also eine "absolute Invariante" im Sinne Kleins ist (vgl. dazu p. 63). Einer "Invarianten" im Sinne Kleins legt man heute den Namen "relative Invariante" oder "Semiinvariante" bei (vgl. z.B. Springer [1977, p. 84], allerdings besitzt der Begriff der "Semiinvarianten" im klassischen Kontext eine wiederum andere Bedeutung, vgl. Dickson [1930 Ch. I, § 10]). Jede relative Invariante einer Gruppe G wird automatisch eine (absolute) Invariante für ihre Kommutatoruntergruppe G'. Mit dieser Bemerkung lassen sich im folgenden gelegentlich einige Argumente abkürzen.

S. 52, 9 ff: Für den Begriff der Kovarianten einer binären Form sowie weiteren, im folgenden hilfreichen Ausführungen vgl. man z.B. Dickson [1930 Chap. I § 4] oder, in moderner Formulierung, Springer [1977 Chap. 3 § 3]. Etwas allgemeiner kann man, bei Zugrundelegung einer Gruppe G, den Begriff der Kovariante auf den einer G–äquivarianten (polynomialen) Abbildung $c : V \longrightarrow W$, $c(gv) = g\,c(v)$ für alle $v \in V, g \in G$, zwischen G–Darstellungen (oder allgemeiner G–Varietäten) V und W zurückführen. Ist $v \in V$, so heißt dann $c(v)$ eine Kovariante von v. Klein macht von dieser umfassenderen Bedeutung vor allem in Abschnitt II des "Ikosaederbuches" öfter Gebrauch (vgl. z.B. II 2, §§ 5–9, II 3, § 11, II 4, §§ 8–10, II 5, §§ 2–6).

S. 57, –4: Zum Begriff der Überschiebung (engl. transvectant) vgl. Springer [1977 Chap. 3 § 3].

S. 61, 2: Für die späteren gleichungstheoretischen Anwendungen ist es bedeutsam, daß die in der "fundamentalen rationalen Funktion Z" auftretenden

Koeffizienten keine unnötigen Irrationalitäten einführen. Abgesehen vom Tetraederfall erreicht dies Klein durch geschickte Normierungen (der Position der regulären Körper und der singulären Werte von Z). Mit Serre [1978] kann man die Fragestellung aber auch von einem systematischeren Standpunkt aus betrachten. Dabei stellt sich zunächst die Frage, unter welchen Bedingungen an einen Grundkörper k man eine treue Aktion einer Polyedergruppe G durch k–rationale Automorphismen der über k definierten projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$, also einen Monomorphismus $G \hookrightarrow PGL_2(k)$, erhält. Für den Fall der Ikosaedergruppe und $\mathrm{char}(k) = 0$ erweisen sich die Forderungen $\sqrt{5} \in k$ und $-1 = x^2 + y^2$ $(x,y \in k)$ als notwendig und hinreichend. Hier ist die zweite Bedingung äquivalent zur Isotropie der Form $x^2 + y^2 + z^2$ oder zum Zerfallen der Standard–Quaternionenalgebra $\mathbb{H} = (-1,-1)$ über k . (Gilt nur $\sqrt{5} \in k$, so erhält man noch eine Einbettung $G \hookrightarrow \mathbb{H}^*/k^*$ in die projektive Einheitengruppe von $\mathbb{H}$, eine k–Form von $PGL_2(k)$. Dazu sowie zur Situation in beliebiger Charakteristik und bei den anderen Polyedergruppen vgl. Serre [1978] § 1. Man vergleiche auch Dickson [1900, Chap. XII] und Feit [1976] für Beweise in positiver Charakteristik.) Die Funktion Z realisiert nun den über k definierten Quotienten $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ von $\mathbb{P}^1$ nach der Polyedergruppe G im Sinne der algebraischen Geometrie (vgl. z.B. Serre [1959 Chap. III, 12]) und muß daher als Quotient zweier Polynome mit Koeffizienten in k darstellbar sein. Daß $\mathbb{P}^1/G$ wieder isomorph zu einer projektiven Geraden ist, ergibt sich als Konsequenz des Satzes von Lüroth (vgl. z.B. Hartshorne [1977 Chap. IV, Example 2.5.5]; Klein benutzt diesen Satz übrigens an einer späteren Stelle, II 5 § 10).

Kapitel I 3:

S. 63, 15: In der Sprache der modernen Algebra liefert die folgende Liste eine Präsentation

$$0 \longrightarrow (R) \longrightarrow \mathbb{C}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{C}[z_1,z_2]^{\hat{G}} \longrightarrow 0$$

des Invariantenrings $\mathbb{C}[z_1,z_2]^{\hat{G}}$ der binären Polyedergruppen $\hat{G}$. Hier werden x,y,z auf die drei fundamentalen, absolut invarianten Formen abgebildet, und (R) ist das von der "Identität" in x,y,z erzeugte Hauptideal. Geometrisch entspricht dieser Präsentation eine Einbettung des Bahnenraumes $\mathbb{C}^2/\hat{G} =$ Specmax $(\mathbb{C}[z_1,z_2]^{\hat{G}})$ als Hyperfläche $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid R(x,y,z) = 0\}$ in den $\mathbb{C}^3$. Diese Hyperfläche S besitzt eine isolierte Singularität im Nullpunkt, die seit den Arbeiten von Du Val [1934] das konstante Interesse der Mathematiker auf sich gezogen hat (vgl. dazu die Übersichten Durfee [1970], Slodowy [1983] sowie die dort zitierte Originalliteratur). Insbesondere verband Du Val die genannten Singularitäten über die dualen Graphen ihrer minimalen Auflösungen mit den später sogenannten Coxeter–Dynkin–Witt–Diagrammen (vgl. z.B. Bourbaki [1968]). Den Kleinschen Fällen I–V entsprechen demgemäß die Diagramme A_{2n-1}, D_{n+2}, E_6, E_7, E_8. (Die Diagramme A_{2n} erhält man durch die Betrachtung der zyklischen Untergruppen von $Sl_2(\mathbb{C})$ von ungerader Ordnung $2n+1$. Diese Gruppen präsentieren sich nicht als Urbilder von Gruppen in $SO_3(\mathbb{R})$, da sie nicht das Element -1 enthalten.) Wie in der Einleitung erwähnt, hat Mc Kay eine darstellungstheoretische Herleitung der erweiterten Diagramme gegeben (vgl. Mc Kay [1980]). Wegen späterer Anwendungen wollen wir hier kurz auf den Fall der binären Ikosaedergruppe eingehen. Mc Kays Resultat besagt dann, daß sich die irreduziblen Charaktere dieser Gruppe durch das erweiterte Diagramm vom Typ E_8

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & & & \cdot\ (3') & & & & \\ & & & & & & & & & & | & & & & \\ \cdot & — & \cdot & — & \cdot & — & \cdot & — & \cdot & — & \cdot & — & \cdot & — & \cdot \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) & & (5) & & (6) & & (4') & & (2') \end{array}$$

parametrisieren lassen, so daß das Tensorprodukt eines Charakters χ mit dem "natürlichen" zwei–dimensionalen Charakter (2) die Summe der im Diagramm benachbarten Charaktere ist,

z.B. $$(6) \otimes (2) = (5) \oplus (4') \oplus (3') .$$

(Wir haben hier die bei Physikern übliche Bezeichnung einer irreduziblen Darstellung durch die Dimension benutzt.)
Weitere Referenzen zu den erwähnten Resultaten, die keinen Eingang in die genannten Übersichten gefunden haben, sind Hazewinkel et al. [1977], Iwahori–Yokonuma [1982], Steinberg [1985], Lamotke [1986], Riemenschneider [1986].

S. 65, –9: Die Existenz der rationalen Funktionen X,Z sowie die Umkehrformeln zu Ende dieses Paragraphen besagen, daß die Fläche $S = \mathbb{C}^2/\hat{G}$ eine rationale Fläche, d.h. birational zur Ebene $\mathbb{C}^2$ ist. Bei den in der Fußnote zitierten Untersuchungen von M. Nöther handelt es sich vermutlich um jene, die später in dessen Arbeit [1889] Eingang gefunden haben. Diese Arbeit ist auch für die simultane Auflösungstheorie der Flächen S wichtig geworden (vgl. Brieskorn

[1968]). Die zunächst auf S rationalen Funktionen X,Z liften sich übrigens zu wohldefinierten regulären Abbildungen $\tilde{S} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ auf der minimalen Auflösung $\tilde{S}$ von S. Ein eingehendes Studium des Verhaltens von relativen Invarianten (d.h. ihres Divisors) auf der minimalen Auflösung $\tilde{S}$ liegt den Arbeiten von Gonzales–Sprinberg, Verdier [1984] und Knörrer [1985_a] zugrunde, die Mc Kays Resultat algebraisch–geometrisch interpretieren.

S. 68, –12: Bei der durch die "Funktion z(Z)" gegebenen konformen Abbildung handelt es sich, etwas vorsichtiger formuliert, um die konformen Abbildungen, die durch die Zweige der Umkehrfunktion zu Z von der oberen und unteren (offenen) Z–Halbebenen geliefert werden. Für grundsätzliche Erörterungen über konforme Abbildungen (Randverhalten, Ecken, ...) vgl. z.B. Ahlfors [1966 Chap. 6], Caratheodory [1960 Teil 7].

S. 71, –3: Hier benutzt Klein die Riemann–Hurwitz–Formel für verzweigte Überlagerungen Riemannscher Flächen (vgl. z.B. Hartshorne [1977 IV, Cor. 2.4]).

S. 72, 10: Diese Argumentation läßt sich nicht auf den Tetraederfall anwenden, da die Form $F_1 = t$ in diesem Fall in 0 und ∞ verschwindet. Für die Zahl der Nullstellen von z_2 ergibt sich nun $\frac{N}{\nu_1} + 2$, entsprechend für die Zahl der Polstellen $\frac{N}{\nu_2} + \frac{N}{\nu_3}$.

S. 72, –4: Auch die hier folgende Diskussion ist im Tetraederfall zu modifizieren. Eine Möglichkeit der Abänderung wird von Klein in einem anderen Kontext (I 5 § 7, S. 133) realisiert.

S. 73, 3: Die Modifikationen im Ikosaederfall erweisen sich als unnötig (vgl. Kleins eigene Korrekturen, S. VIII).

S. 80, 1: Bei der Herleitung dieser Formel benutze man auch die Eulersche Formel für homogene Polynome.

S. 80, –1: Entsprechend den früheren Anmerkungen ist der Tetraederfall mit geeigneten Modifikationen zu behandeln.

S. 82, –1: In diesen abschließenden Bemerkungen spielt Klein u.a. auf die Realisation der binären Polyedergruppen als Monodromiegruppen der entsprechenden hypergeometrischen Differentialgleichungen an. Dieser Sachverhalt hat eine ausführliche Darstellung in seinen "Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion" [1933] gefunden (für eine Übersicht vgl. man Slodowy [1986]). Sowohl in diesen Vorlesungen als auch in denen über elliptische Modulfunktionen, Klein—Fricke [1890] (Kap. 2,3,4 des ersten Abschnitts), wird die Thematik der vorangehenden Paragraphen in einem umfassenderen Kontext und sehr ausführlich behandelt. Insbesondere werden dort auch die Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichungen, d.h. die hypergeometrischen Funktionen, studiert. Explizite Formeln zur Lösung der Ikosaedergleichung gibt Klein in [1877_c I, § 8]. Als eine neuere Einführung in die Grundlagen der Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichungen sei Jänich [1983 Kapitel XII] genannt, vgl. auch Fischer–Lieb [1988 Kapitel VI] und Caratheodory [1960 7. Teil]. Eine historische Einordnung liefert J. Gray [1984], [1986].

Kapitel I 4:

S. 83, –11: Für den heutigen Leser mag es nützlich sein, die in den folgenden Paragraphen dargestellten Resultate aus der körpertheoretischen Formulierung der Galoistheorie (wie z.B. in Artin [1968], Lang [1967], v.d. Waerden [1966]) herzuleiten. Wir begnügen uns mit einigen Erläuterungen zur Übertragung der Begriffe.

Sei k ein Körper und K eine Galoiserweiterung von k mit endlicher Galoisgruppe G. Im gleichungstheoretischen Kontext ist eine solche Erweiterung der Zerfällungskörper $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ eines separablen Polynoms $P \in k[X]$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ die Wurzeln von P bezeichnen mögen. Jedes Element $y \in K$ ist nun darstellbar als eine "rationale Funktion der Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$", wobei die Koeffizienten aus k sind. Seien $y_1 = y, y_2, \ldots, y_m$ die Galoiskonjugierten von y und

$$R = \prod_{i=1}^{m} (X - y_i)$$

das irreduzible Polynom von y über k. Die Gleichung $R = 0$ heißt dann eine (rationale) <u>Resolvente</u> der Gleichung $P = 0$ oder der Körpererweiterung $k \subset K$. Der Begriff "Resolvente" geht auf Euler [1732] zurück, der die Gleichung $R = 0$ "aequatio resolvens" nannte. Lagrange und nachfolgende französische Autoren (z.B. Galois) sprachen von "réduite". Manche Autoren nennen das Element y eine Resolvente. Dies veranlaßte R. Fricke zu der Unterscheidung "Resolvente $R = 0$" und "Solvente y".

Der Grad m von R, oder der Grad der Körpererweiterung $k(y)$ über k, ist gleich dem Index $|G/G_y|$ des Stabilisators $G_y = \{g \in G \mid g\,y = y\}$ in G. Die Gleichung $R = 0$ heißt eine <u>Galoisresolvente</u> von $P = 0$ falls ihr Grad m gleich der Ordnung von G oder, äquivalent dazu, $G_y = \{1\}$ ist. Im letzteren Fall ist der Grad von $k(y)$ über k gleich dem von K. Es gilt dann also $K = k(y)$, d.h. y ist ein primitives Element von K über k.

Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Ein Element $y \in K$ heißt der Gruppe H <u>zugehörig</u> genau dann, wenn der Stabilisator G_y gleich H ist. In diesem Fall ist y ein primitives Element für den Fixkörper K^H, d.h. $K^H = k(y)$. Es gilt dann der "Satz von Lagrange", daß jedes Element $z \in K^H$ eine "rationale Funktion von y" mit Koeffizienten in k ist.

Der Zerfällungskörper $L = k(y_1, \dots, y_m)$ von R ist eine Galois'sche Zwischenerweiterung $k \subset L \subset K$. Es ist $\mathrm{Gal}(K,L) = \bigcap_{i=1}^{m} G_{y_i}$ und $\mathrm{Gal}(L,k) = G/\mathrm{Gal}(K,L)$. Zwei Resolventen $R = 0$ und $R' = 0$ heißen <u>äquivalent</u>, wenn ihre Zerfällungskörper über k übereinstimmen. In diesem Fall lassen sich die Wurzeln von $R' = 0$ als "rationale Funktionen" in den Wurzeln von $R = 0$ mit Koeffizienten in k ausdrücken und umgekehrt. Ist insbesondere G einfach, so sind alle nicht–trivialen Resolventen zueinander äquivalent.

S. 84, –14: Hier betrachtet also Klein zunächst die Galoiserweiterung $K \supset k$, wobei K der Körper $k_0(x_0, \dots, x_{n-1})$ der rationalen Funktionen in n Unbestimmten über einem Grundkörper k_0 und $k = K^{S_n}$ der Fixkörper unter der natürlichen Aktion der symmetrischen Gruppe S_n ist. Ist k_0 von der Charakteristik Null (wie bei Klein), so gilt $k = k_0(s_1, \ldots, s_n)$, wobei die s_i die elementaren Potenzsummen (S. 85, Formel (1)) sind.

S. 90, –8 Bei dieser Transformation handelt es sich um eine sogenannte Tschirnhaustransformation. Da Klein erst später und an verschiedenen Stellen darauf eingeht (vgl. II 1, §§ 1, 2,II 2, §§ 5, 6) seien hier einige für die folgenden Entwicklungen hilfreiche Erläuterungen vorangeschickt.

Sie $P \in k[X]$ ein Polynom vom Grad n, das über einer Erweiterung von k in der Form $P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$ zerfalle. Sei $\psi \in k(X)$ eine rationale Funktion, die in allen Wurzeln x_i, $i = 1, \ldots, n$, definiert sei. Dann heißt

$$Q = \tau_\psi(P) = \prod_{i=1}^{n} (Y - \psi(x_i)) \in k[Y]$$

die <u>Tschirnhaustransformation von</u> P <u>mittels</u> ψ. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man ψ durch ein Polynom um Grad $< n$ ersetzen. Das Polynom Q ist dann über k proportional zur Resultante von P und $\psi - Y$ (beide aufgefaßt als Polynome in X über $k[Y]$). Sind P und Q separabel, so lassen sich die Wurzeln von P aus denen von Q auf rationalem Wege berechnen. Für diesbezügliche detaillierte Ausführungen sei auf Weber [1912 I 6] und Fricke [1924 S. 163–165] verwiesen.

Man kann der Tschirnhaustransformation eine transformationsgruppentheoretische Interpretation geben, auf die Klein bei Gelegenheit (II 4 § 10, S. 234) eingeht. Dazu faßt man den affinen Raum $N_n (\cong A_k^n)$ aller normierten Polynome vom Grad n

als Quotienten (im Sinne der algebraischen Geometrie) des affinen Raumes $W_n(\cong A_k^n)$ der "Wurzeln" $(x_1, \dots, x_n)$ nach der natürlichen Permutationsaktion der symmetrischen Gruppe S_n auf. Die Quotientenabbildung $W_n \longrightarrow N_n$ wird dann durch die elementar–symmetrischen Funktionen vermittelt

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (a_1, \dots, a_n),$$

wobei $\prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = X^n - a_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$. Jede Kovariante, d.h. jeder über k definierte, S_n – äquivariante Morphismus $\Psi : W_n \longrightarrow W_n$ induziert dann einen Morphismus $T_\Psi : N_n \longrightarrow N_n$. Die Menge $\mathcal{M}_n = \mathrm{Mor}_{S_n}(W_n, W_n)$ aller Kovarianten läßt sich als Modul über den invarianten Funktionen $k[W_n]^{S_n} = k[N_n]$ auffassen und wird, sofern $\mathrm{char}(k) = 0$ ist, von den fundamentalen Kovarianten

$$\prod\nolimits_\ell : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1^\ell, \dots, x_n^\ell), \quad \ell = 0, \dots, n-1,$$

frei über $k[N_n]$ erzeugt (dies ergibt sich aus der Invarianten– und Kovariantentheorie der symmetrischen, wie allgemeiner auch der endlichen Spiegelungsgruppen, vgl. z.B. Bourbaki [1968 V § 5]). Ist nun etwa $\Psi = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \prod_\ell$ mit $\alpha_\ell \in k[N_n]$, so ist für $P = X^n - a_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$ das Polynom $T_\Psi(P) \in N_n$ gerade die Tschirnhaustransformation $\tau_\psi(P)$ von P mittels des Polynoms $\psi = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell(a_1, \dots, a_n) X^\ell$.

S. 91, 10: Mit den vorangegangenen Deffinitionen lassen sich auch die folgenden Ausführungen Kleins präziser formulieren.

Sei $P \in N_n$ (im Anschluß an Klein, irreduzibel) und $\mathcal{M}_P = \{\Psi \in \mathcal{M}_n \mid T_\Psi(P) = P\}$ das "Isotropieuntermonoid" des Monoids $\mathcal{M}_n$ aller Kovarianten (bzgl. Komposition). Ist $\Psi \in \mathcal{M}_P$ und $(x_1, \dots ,x_n)$ eine Anordnung der Wurzeln von P, so ist $\Psi(x_1, \dots ,x_n)$ eine andere Anordnung derselben. Also gibt es eine Permutation $\sigma_\Psi \in S_n$ so daß

$$\Psi(x_1, \dots ,x_n) = \sigma_\Psi(x_1, \dots ,x_n)\,.$$

Sind Φ, $\Psi \in \mathcal{M}_P$, so folgt mit der S_n–Äquivarianz von Φ daß $\sigma_{\Phi\cdot\Psi} = \sigma_\Psi \cdot \sigma_\Phi$ gilt, d.h. daß die Zuordnung $\Psi \longrightarrow \sigma_\Psi$ einen Antihomomorphismus von Monoiden

$$\sigma : \mathcal{M}_P \longrightarrow S_n$$

definiert. Das Bild $\sigma(\mathcal{M}_P)$ ist dann als Untermonoid einer endlichen Gruppe eine Untergruppe (dies ist letztlich der Inhalt der Behauptung in Zeile 10). Kleins Ausführungen in den Zeilen 11 bis –10 zeigen zunächst, daß $\sigma(\mathcal{M}_P)$ die Galoisgruppe Γ enthält. Aufgrund der gleichen Ordnung stimmen daher beide Gruppen überein.

S. 92, 18: Zur Herleitung des folgenden Resultates sei $P = 0$ die fragliche Gleichung. Man schließt zunächst, daß jede Wurzel x von P eine Galoissolvente, also ein primitives Element des Zerfällungskörpers von P über k ist (z.B. da die ψ_i modulo P verschieden sind, die $\psi_i(x)$ also alle Wurzeln von P durchlaufen müssen). Aufgrund der Irreduzibilität von P hat dann die Galoisgruppe Γ die Ordnung n . Die Argumentation auf S. 91 zeigt schließlich daß Γ in $\sigma(\mathcal{M}_P)$, d.h. der "Gruppe der ψ" , enthalten ist, und daher mit ihr übereinstimmt.

S. 93, 2: Es handelt sich hier also um die Gleichungen (1) und (2) von S. 62 oder, etwas umgestellt in die Form $f(z) = 0$, um

$$(1)' \quad z^n - Z = 0$$

$$(2)' \quad c.F_2(z,1)^{\nu_2} - Z.F_3(z,1)^{\nu_3} = 0 .$$

Hier sind die linken Seiten Polynome in z über dem Funktionenkörper $k(Z)$, dessen Konstanten k die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Koeffizienten der Transformationen der zugehörigen Polyedergruppe enthalten (e.g. $k \supset \mathbb{Q}(\mu)$, $\mu = e^{2\pi i/n}$ im Falle (1)' und $k \supset \mathbb{Q}(\varepsilon)$, $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$ im Ikosaederfall; im Tetraederfall benötigt Klein aufgrund der gewählten Position des Tetraeders zudem noch $\sqrt{3} \in k$) .

S. 94, – 10: Da die Ikosaedergleichung

$$H(z,1)^3 - 1728 \cdot Z \cdot f(z,1)^5 = 0$$

nur Koeffizienten aus $\mathbb{Q}(Z)$ enthält, kann man sie als Gleichung über diesem Körper auffassen. Ihr Zerfällungskörper (i.e. $\mathbb{Q}(\varepsilon,z)$) ist dann vom Grade 240 über $\mathbb{Q}(Z)$. Vgl. hierzu auch Frickes Darstellung [1926 I 3, § 2, S. 57].

S. 95, – 6: Will man die von Klein hier diskutierte Situation präzisieren, so kann man dies in der Sprache der zugehörigen Funktionenkörper tun. Dann betrachtet man die Köpererweiterung $k(z_1,z_2)^{\hat{G}} \subset k(z_1,z_2)$, wobei $\hat{G} \subset SL_2(k)$ eine endliche binäre Gruppe ist. In der heutigen algebraischen Geometrie verwendet man aber auch den geometrischen Begriff der Galoisüberlagerung (vgl. z.B. Milne [1980 I § 5]). Eine solche liegt vor, wenn man den Quotienten $\mathbb{A}_k^2 \longrightarrow \mathbb{A}_k^2/\hat{G}$ außerhalb des Verzweigungsortes, also die unverzweigte Überlagerung $\mathbb{A}_k^2\setminus\{0\} \longrightarrow (\mathbb{A}_k^2\setminus\{0\})/\hat{G}$, betrachtet.

S. 98, 14: Aus geometrischer Sicht handelt es sich bei F um eine Faktorisierung des Ikosaederquotienten über den Tetraederquotienten:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \arrow[rr, "Z"] \arrow[dr, "r"'] & & \mathbb{P}^1/G \\ & \mathbb{P}^1/T \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

(hier ist T eine in der Ikosaedergruppe G enthaltene Tetraedergruppe). Da Z vom Grad 60 und r vom Grad 12 ist, hat F den Grad 5.

S. 98, – 11: Mit dem Ikosaederproblem ist hier das Formenproblem für die binäre Ikosaedergruppe gemeint.

S.100, –7: Da die Tetraedergruppe auf den Ikosaederecken $E = \{z = z_1/z_2 \in \mathbb{P}_1 \mid f(z_1,z_2) = 0\}$ einfach tansitiv operiert, sind alle 12 Punkte aus E einfach für die Abbildung r, und das Bild $r(E)$ besteht aus einem Punkt.

Andererseits besitzt $Z = F \circ r$ in den Punkten von E einen fünffachen Pol. Daher besitzt F in $r(E)$ einen fünffachen Pol. Die folgende Argumentation betreffend ψ und φ ist, obwohl im Detail komplizierter, vollkommen analog.

S. 110, – 4: Zusammenfassend kann man also sagen, daß sich die Ikosaedergruppe, nach geeigneter Identifikation der 6 Paare antipodaler Ikosaederecken mit den Punkten der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbf{F}_5)$, mit der Gruppe $PSL_2(\mathbf{F}_5)$ identifiziert. Klein wird an späterer Stelle (e.g. II 1) erneut auf diesen Sachverhalt eingehen.

Kapitel I 5:

S. 116, –5: Liegen die Koeffizienten der gebrochenen linearen Transformationen ψ_i in einem Grundkörper k, so liefert die Formel (1) eine Gleichung N–ten Grades (für x) über dem Funktionenkörper $k(X)$. Aus geometrisch–funktionentheoretischer Sicht definiert die Formel (1) eine Quotientenabbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1/\Gamma & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1 \\ x & & \longmapsto & & X(x) \end{array}$$

nach der von den ψ_i gebildeten Untergruppe $\Gamma \subset PGL_2(k)$.

S. 117, 9: Dies impliziert, daß die Gruppe Γ zu einer der früher eingeführten Polyedergruppen in $PGL_2(\mathbb{C})$ konjugiert ist.

S. 120, –13: Der arithmetische Teil des obigen Beweises wird in zahlreichen späteren Herleitungen der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $PGL_2(\mathbb{C})$ oder $SO_3(\mathbb{R})$ reproduziert (vgl. z.B. Weyl [1955]). Im Fall der Obergruppe $SO_3(\mathbb{R})$ ergibt sich die Konjugation der endlichen Untergruppen gleichen Typs mittels eines elementargeometrischen Arguments. Benutzt man die Tatsache, daß alle endlichen Untergruppen von $PGL_2(\mathbb{C})$ in die maximal kompakte Untergruppe $SO_3(\mathbb{R}) \subset PGL_2(\mathbb{C})$ konjugiert sind, so erübrigt sich damit die Heranziehung der von Klein benutzten differentialgleichungstheoretischen Sachverhalte (i.e. S. 120, 8 ff).

S. 123, 4: Neben Kleins eigenen Angaben vergleiche man die Arbeiten von J. Gray, [1984], [1986] für eine historische Einordnung der in diesem Abschnitt behandelten Problematik.

S. 123, –6 ff: Hier nimmt Klein ohne nähere Begründung an, daß der Invariantenring $k[A^n]^\Gamma$ einer endlichen Untergruppe $\Gamma \subset GL_n(k)$ endlich erzeugt ist. Ein allgemein gültiger Beweis für diesen Sachverhalt (zumindest für $char(k) = 0$, oder $(char(k), |\Gamma|) = 1$) scheint zum ersten Mal von Weber [1899 § 57] publiziert worden zu sein. Webers Beweis benutzt den Hilbert'schen Basissatz (Hilbert [1890]) und die Mittelungstechnik von Hurwitz ([1897]).

S. 124, 7: Vgl. hierzu auch Weber [1899], insbesondere § 58 und § 60.

S. 124, –17: Aus geometrischer Sicht läßt sich die hier behandelte Situation folgendermaßen präzisieren. Ist $\Gamma \subset GL_n(k)$ eine endliche Untergruppe, so operiert diese in natürliche Weise auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(A^n)$. Bezüglich einer affinen Karte, z.B. mit Koordinaten $z_1/z_0,\dots,z_{n-1}/z_0$, sind die Transformationen von Γ dann gebrochen linear. Als Analogon zum Formenproblem der Gruppe Γ können wir nun das Problem der (lokalen) Umkehr der Quotientenabbildung

$$\mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}/\Gamma$$

auffassen. Klein führt diese Interpretation nicht voll aus und begnügt sich mit einem birationalen Standpunkt. Aus körpertheoretischer Sicht handelt es sich bei der Auflösung des " Γ zugehörigen Gleichungssystems" um die Rekonstruktion des Funktionenkörpers $k(\mathbb{P}^{n-1}) = k(z_1/z_0,\dots,z_{n-1}/z_0)$ über dem Invariantenkörper $k(\mathbb{P}^{n-1})^{\Gamma} = k(Z_1,Z_2,\dots,)$.

S. 124, –5: Bei diesen Ausführungen mag die folgende Interpretation hilfreich sein. Sei $\Gamma \subset S_n$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe und

$$q : W_n \longrightarrow W_n/\Gamma$$

der Quotientenmorphismus nach der Permutationsaktion von Γ auf dem n–dimensionalen affinen Raum W_n ("der Wurzeln") über einem Grundkörper k . Die Lösung des Formenproblems für Γ besteht dann in der (lokalen) Umkehr von q (außerhalb des Verzweigungsortes). Ist nun $f \in k[X]$ ein separables, normiertes Polynom n–ten Grades mit Wurzeln $x_0,\dots,x_{n-1}$, dessen Galoisgruppe über k sich als Permutationsgruppe der x_i mit $\Gamma \subset S_n$ identifiziert, so ist der Bildpunkt $y = q(x_0,\dots,x_{n-1})$ ein k–rationaler Punkt von W_n/Γ . Daher lassen sich die Wurzeln x_i von f mittels der Umkehrabbildung von q über k ausdrücken.

S. 125, –5: Kleins Begriff der Reduktion von Formenproblemen läßt sich folgendermaßen fassen. Es seien G, H endliche Gruppen und V, W über einem Grundkörper k definierte Darstellungen von G bzw. H. Die zugehörigen Formenprobleme beinhalten dann die Umkehr der Quotientenabbildungen $q : V \longrightarrow V/G$ bzw. $Q : W \longrightarrow W/H$, körpertheoretisch gesehen also die Konstruktion der Erweiterungen

$$K = k(V)^G \subset k(V) = K' \quad \text{bzw.} \quad L = k(W)^H \subset k(W) = L' \ .$$

Das Formenproblem zu Q ist nun auf das Formenproblem zu q reduzierbar, falls, heuristisch gesprochen, die zur Umkehr von Q erforderlichen algebraischen Funktionen mittels rationaler Funktionen (deren Koeffizienten in L liegen) in den zur Umkehr von q benötigten Funktionen ausdrückbar sind. Präziser können wir diesen Sachverhalt in der Sprache der heutigen algebraischen Geometrie so formulieren: es gibt einen L–wertigen Punkt, $\bar{x} \in (V/G)(L)$, des Quotienten V/G, so daß L' von den Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ eines Urbildpunktes $x \in q^{-1}(\bar{x})$ erzeugt wird. Hierbei ist irgendein k–rationales Koordinatensystem $V \cong A^n$ zugrundegelegt, und die Werte der Koordinaten x_i liegen zunächst in einem algebraischen Abschluß $\bar{L} \supset L' \supset L$. (Etwas weniger einschränkend könnte man nur $L' \subset L(x_1,\dots,x_n)$ fordern. In der älteren Literatur, z.B. Weber [1899 § 58] oder auch Krull [1959] findet man die Koordinaten auch durch eine "generische" Linearkombination über L ersetzt.)

Zur effektiven Reduktion von Formenproblemen zu gleicher Gruppe $(G = H)$ konstruiert Klein später G–äquivariante, über k definierte rationale Abbildungen $\varphi : W \longrightarrow V$. Um die folgende Interpretation seines Vorgehens zu vereinfachen, nehmen wir jetzt an daß G einfach und V irreduzibel ist (eine Situation, auf die man sich leicht zurückziehen kann) sowie daß φ bereits polynomial ist. Bezeichnen dann $W' \subset W$, $V' \subset V$ die Mengen der G–regulären Punkte, i.e. der Punkte mit trivialem G–Stabilisator, so zeigt man unter unseren Voraussetzungen (und der trivialen Annahme $W' \neq \phi$, $V' \neq \phi$) leicht, daß $\varphi(W') \cap V'$ nicht leer und somit $W^0 = \varphi^{-1}(V')$ Zariski–dicht in W ist. Wir erhalten dann ein cartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W^0 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "Q"'] & & V' \arrow[dd, "q"] \\
& W^0/G \times_{V'/G} V' \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[dl, "pr_1"] & \\
W^0/G \arrow[rr, "\overline{\varphi}"'] & & V'/G
\end{tikzcd}$$

bei dem $\overline{\varphi}$ die von φ induzierte Abbildung auf den Quotientenräumen und die natürliche Abbildung α ein Isomorphismus von Varietäten ist.

Dieses Diagramm liefert die gewünschte Reduktion des Formenproblems zu Q auf das zu q . Aus geometrisch–funktionentheoretischer Sicht (man nehme $k = \mathbb{C}$ an) liefert nämlich jede lokale Umkehr $s : V'/G \supset U \longrightarrow V'$ von q eine lokale Umkehr $S : W^0/G \supset \overline{\varphi}^{-1}(U) \longrightarrow W^0$ von Q durch die Setzung

$$S = \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id}_{W^0/G} \times (s \circ \overline{\varphi})) \ ,$$

die S als eine rationale Funktion in s mit Koeffizienten in L ausdrückt. Nehmen wir an daß φ und somit $\overline{\varphi}$ dominant sind, so entspricht dem obigen Diagramm ein duales von Funktionenkörpern

$$
\begin{tikzcd}
L' \arrow[dr, "\alpha^*"', "\sim"] & & K' \arrow[ll, hook', "\varphi^*"'] \arrow[dl] \\
& L \otimes_K K' & \\
L \arrow[uu, "Q^*"] \arrow[uu, phantom, "\alpha"'] \arrow[ur] & & K \arrow[ll, hook', "\bar{\varphi}^*"] \arrow[uu, "q^*"']
\end{tikzcd}
,
$$

welches zeigt, daß L' von K' über L erzeugt wird (α und α^* sind Isomorphismen). Wir erhalten den Anschluß an unsere algebraisch–geometrische Formulierung der "Reduktion" wie folgt: Der Morphismus $\bar{\varphi} : W/G \longrightarrow V/G$ definiert einen L–wertigen Punkt $\bar{x}$

$$
\begin{tikzcd}
k[V]^G \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\bar{x}"'] & K \arrow[r, "\bar{\varphi}^*"] & L
\end{tikzcd}
$$

des Quotienten V/G. Sind $x_1,\dots,x_n$ k–rationale Koordinaten auf V, also $k[V] = k[x_1,\dots,x_n]$, so liefert $x = (x_1,\dots,x_n) \in A^n(K') = V(K')$ einen K'–wertigen Urbildpunkt, $x \in q^{-1}(\bar{x})$. Da die Elemente $x_1,\dots,x_n$ den Körper K' über K erzeugen, erzeugen sie auch L' über L.

Die obige Argumentation ist leicht zu modifizieren, falls φ nicht dominant ist. Will man diesen Fall mitbetrachten, so kann man die obigen Entwicklungen jedoch gleich in den allgemeineren Rahmen einbetten, in dem V und W quasiprojektive G–Varietäten sind (ggf. hat man zu fordern, daß $\varphi(W') \cap V'$ nicht leer ist). Insbesondere fallen Kleins "Gleichungssysteme" und deren Reduktion in diesen Rahmen. Wir können die Details dem interessierten Leser überlassen.

Die von Klein in den Kapiteln II 3 und II 4 durchgeführten Reduktionen lassen sich dem obigen Schema unterordnen. Man beachte dabei jedoch, daß Klein sich zumeist auf die Konstruktion von α oder α^{-1} beschränkt und das Faserprodukt (i.e. $W^0/G \times_{V'/G} V'$) durch einfachere, birational äquivalente Objekte ersetzt.

S. 131, 5: Klein hat den Schwarz'schen Funktionen eingehendere Beachtung geschenkt in den Vorlesungen über die elliptischen Modulfunktionen (Klein–Fricke [1890 insbes. Kap. I 3]) und vor allem in den Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion ([1933]).

S. 132, 5 Neben den von Klein angegebenen Quellen vergleiche man auch Klein–Fricke [1892 Kapitel V 4, § 7] sowie Fricke [1926 Kapitel I 4]. In dem Werk von Klein und Fricke findet sich auch die Herleitung des Zusammenhangs zwischen Modulfunktionen und Thetateilwerten, der den expliziten Formeln dieses Paragraphen zugrunde liegt.

S. 134, 10: Neben Klein–Fricke [1890], [1892], Fricke [1926] vergleiche man auch Fricke [1916], [1922].
Moderne Einführungen in die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen geben z.B. Lang [1973 Ch. 5] und Schoeneberg [1974].
Die historische Bedeutung der Lösungen in diesem Paragraphen wird in Kleins folgendem Kapitel, II 1, klarer herausgestellt werden.

<u>Kapitel II 1</u>:

S. 140, 22: Zur Tschirnhaustransformation vgl. unsere Anmerkungen zu I 4, § 4.

S. 141, 3: Zum Begriff der Resolventen vgl. unsere Anmerkungen zu I 4, § 1.

S. 141, 15: Eine Darstellung der historischen Entwicklung der Theorie der Gleichungen 5. Grades bis zu den ersten Arbeiten von Hermite, Brioschi, und Kronecker, die auch auf die früheren Autoren ausführlicher eingeht, gibt J. Pierpont [1895].

S. 142, 12: Diese Behauptung ist nicht begründet. Körpertheoretisch entspricht ihr im wesentlichen die Behauptung, daß alle Zwischenkörper n–ten Grades $k \subset L \subset K$ einer Galoiserweiterung $k \subset K$ zueinander konjugiert sind. Dies ist aber i.a. nicht korrekt, da nicht alle Untergruppen vom Index n in Gal(K,k) zueinander konjugiert sein brauchen. Während zwar alle Untergruppen vom Index n der symmetrischen Gruppe S_n, $n \neq 6$, in S_n konjugiert sind, gibt es zwei Konjugationsklassen von Untergruppen des Index 6 in S_6, vgl. dazu Fricke [1924 § 7, S. 348–353]. In seinen Forschungen über Gleichungen höheren Grades war sich Klein dieser Sachlage voll bewußt.

S. 145, 1: Aus heutiger Sicht läßt sich die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen am einfachsten mittels des Isogeniebegriffs für elliptische Kurven interpretieren (vgl. Houzel [1978 §§ 8,9] für historische Erläuterungen und Lang [1973 Chap. 5,6] für Details zu den folgenden Ausführungen).

Wir fassen eine elliptische Kurve E auf als die Gruppe der $\mathbb{C}$–wertigen Punkte einer eindimensionalen abelschen Varietät, die über einem Grundkörper $k \subset \mathbb{C}$ definiert sei. Wir können dann E in der Form

$$E = \mathbb{C}/\Lambda\ ,\ \Lambda = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}\tau\ ,\ \mathrm{Im}(\tau) > 0$$

parametrisieren. Sei nun n eine ungerade Primzahl (der Einfachheit halber; für beliebige n vgl. Lang, loc. cit.). Zwei elliptische Kurven E and E' heißen n–isogen, wenn es einen Homomorphismus $\varphi : E \longrightarrow E'$ gibt, dessen Kern isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{F}_n$ ist. Man sieht leicht, daß diese Relation symmetrisch ist und daß die zu E n–isogenen Kurven E' den eindimensionalen Unterräumen der Gruppe $E_n \cong \Lambda/\frac{1}{n}\Lambda \cong \mathbb{F}_n^2$ der n–Teilungspunkte von E, also den Punkten $\infty,0,1,\dots,n-1$ der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_n)$ über $\mathbb{F}_n$ entsprechen. Sei $j = j(q) = j(e^{2\pi i\tau})$ die j–Invariante von E. Nach Auswahl geeigneter Repräsentanten in $\mathbb{F}_n^2$ für die Punkte von $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_n)$ erhält man die j–Invarianten $j_\infty, j_0, \dots, j_{n-1}$ der zu E n–isogenen Kurven E' in der Form $j(q')$, wobei q' die von Klein in Formel (9) angegebenen Werte durchläuft. Diese $n+1$ Werte erfüllen die sogenannte Modulargleichung

$$\Phi_n(x,j) = 0 \quad ,$$

bei der Φ_n ein Polynom aus $\mathbb{Z}[X,Y]$ ist, das in X und in Y den Grad $n+1$ hat. Ist $j = j(E)$ allgemein genug, z.B. transzendent über $\mathbb{Q}$, und ε eine n–te Einheitswurzel, so ist die Galoisgruppe von $\Phi_n(x,j)$ über dem Körper $\mathbb{Q}(\varepsilon,j)$ isomorph zu der Gruppe $PSL_2(\mathbb{F}_n)$, die auf den Wurzeln $j_\infty, j_0, \dots, j_{n-1}$ entsprechend der natürlichen Aktion auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_n) = \{\infty,0,1,\dots,n-1\}$ operiert. (Dieses Resultat ist zwar nicht explizit in Lang [1973] formuliert, ergibt sich aber unmittelbar aus den dortigen Entwicklungen, insbesondere Chap. 6, Theorem 3 und Beweis von Theorem 6.)

Vor der Einführung der j–Invariante (bzw. $J = j/1728$) durch Dedekind [1877] und Klein [1878a] betrachtete man den Legendre'schen Modul κ anstelle von j, der in der Normalform

$$y^2 = (1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)$$

für E in Erscheinung tritt und mit j durch die Gleichung

$$j = 16\,\frac{(\kappa^4+14\kappa^2+1)^3}{\kappa^2(\kappa^2-1)^4}$$

verbunden ist (vgl. z.B. Klein–Fricke [1890]). An die Stelle der Modulargleichung $\Phi_n(X,j) = 0$ tritt jetzt bei den entsprechenden Entwicklungen die von Klein angeführte Gleichung (6) bzw. (7).

S. 147, 11: Multiplikatorgleichungen treten in der Transformationstheorie elliptischer Modulformen auf. Ist z.B. f eine Modulform 1. Stufe und n eine ungerade Primzahl, so ist die zugehörige Multiplikatorgleichung $\Psi_{f,n}(X,j) = 0$ gegeben durch ein Polynom (n+1)–ten Grades

$$\Psi_{n,f} = \prod_{\nu} \left(X - \frac{f_\nu}{f}\right) \in \mathbb{C}(j)[X] \quad ,$$

bei dem die f_ν, $\nu = \infty,0,1,\dots,n-1$ die verschiedenen Transformierten n–ter Ordnung von f durchlaufen (d.h. $f_\nu(\tau) = f\left[\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right]$ für n+1 geeignete Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = n$). Für mehr Details über Multiplikator–gleichungen sei auf Klein–Fricke [1892 IV 2], Fricke [1922 II 6 § 4], sowie Schoeneberg [1974 VI, 7] verwiesen.

S. 147, 14: Jacobis Gleichungen hingen von insgesamt $\frac{n+1}{2}$ Parametern ab. Seine Beobachtung besagte dann, daß die (n+1)–Tupel der Quadratwurzeln der

Lösungen dieser Gleichungen eine lineare Manigfaltigkeit bildeten, die durch die $\frac{n+1}{2}$ linearen Gleichungen (14) oder die Parametrisierung (13) beschrieben werden konnte. Diese Sachlage wird etwas klarer im übernächsten Paragraphen 5 dargestellt. Es ist Kleins Verdienst, der oben genannten Parametrisierung eine darstellungstheoretische Interpretation gegeben zu haben. Für den Fall $n = 5$ wird diese in II, 4 vorgestellt. Ist n eine beliebige ungerade Primzahl, so läßt sie sich aus heutiger, darstellungstheoretischer Sicht folgendermaßen beschreiben.

Sei G die Gruppe $SL_2(\mathbb{F}_n)$ und $B \subset G$ die Boreluntergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Wir bezeichnen mit $\tau : B \longrightarrow \mathbb{Q}^\times$ den trivialen und mit $\lambda : B \longrightarrow \mathbb{Q}^\times$ den Lift auf B des Legendre–Charakters $\mathbb{F}_n^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$. Es gibt dann eine offensichtliche quadratische und G–äquivariante Abbildung zwischen den (n+1)–dimensionalen induzierten Darstellungen

$$Q : \mathrm{Ind}_B^G \lambda \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^G \tau \ ,$$

die über $\mathbb{Q}$ definiert ist. Während die rechte Darstellung über $\mathbb{Q}$ in eine n–dimensionale und die triviale Darstellung zerfällt, spaltet sich $\mathrm{Ind}_B^G \lambda$ über einer quadratischen Erweiterung ($\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ falls $n = 5$) in zwei Summanden der Dimension $\frac{n+1}{2}$. Die Parametrisierung (13) entsteht durch Einschränkung von Q auf einen dieser Summanden (über dem Grundkörper $\mathbb{Q}(\epsilon)$).

Für Jacobi, Kronecker und Klein war die modulfunktionentheoretische Interpretation der Abbildung Q mittels Teilwerten der Θ–Funktion von Bedeutung (vgl. dazu Kronecker [1879], Klein [1885], Hurwitz [1886]).

S. 149, 6: Hier bedeutet "reziprok" daß die Gleichung (18) durch die Transformation $u \longmapsto \frac{\alpha}{u}$, $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, in sich übergeht (vgl. auch die Fußnote *** auf S. 30). Als Konsequenz reduziert sich die Lösung von Gleichung (18) auf die von quadratischen Gleichungen.

S. 149, –3: Der Bericht in diesem Paragraphen dient der Vorbereitung des späteren Kapitels II 4, in dem Klein seine transformationsgruppentheoretische Interpretation der historisch vorgängigen Entwicklungen gibt. In Anbetracht der dem heutigen Leser sicherlich knapp erscheinenden Darstellung mag es hilfreich sein, beide Textteile ständig miteinander zu vergleichen.

S. 151, –1: Für diese Übereinstimmung benötigt man noch die Identität $\Pi = 5^5 \cdot T^4$. Diese wird in Kapitel II 4 hergeleitet (vgl. die dortigen Formeln (10) und (27)).

S. 152, –11: Sinngemäß mit den späteren Entwicklungen sowie denen von Brioschi und Kronecker muß die Formel (27) die Gestalt

$$\sqrt{Z} = \lambda \cdot \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial A} + \mu \cdot \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial B} + \nu \cdot \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial C}$$

haben. Dabei dürfen λ,μ,ν beliebige rationale Funktionen in A_0, A_1, A_2 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ sein. Die Ausdrücke $\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial A}$, etc. sind ebenfalls rational in A_0, A_1, A_2. Sie werden durch Auflösung des symbolischen Gleichungssystems

$$\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial A_i} = \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial A_i} + \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial B} \cdot \frac{\partial B}{\partial A_i} + \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial A_i} \ , \quad i = 0,1,2$$

definiert (vgl. den weiter unten von Klein angeführten Artikel von Brioschi, insbesondere S. 126–127).

S. 155, –3: Hier geht die Tatsache ein, daß alle Untergruppen vom Index 5 in A_5 zueinander konjugiert sind (vgl. auch unsere Anmerkung zu S. 142).

S. 157, 12: Körpertheoretisch lassen sich diese Begriffe auf triviale Weise definieren. Sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung, $\overline{K}$ der algebraische Abschluß von K. Dann heißt ein Element $x \in \overline{K} \backslash k$ eine natürliche (bzw. akzessorische) Irrationalität in Bezug auf K, falls $x \in K$ (bzw. $x \notin K$).

S. 157, –9: Obwohl der Begriff einer einparametrigen Resolvente durch die aufgeführten Beispiele hinreichend erläutert wurde, mag eine formale Definition nützlich sein.

Sei K ein Funktionenkörper über einem Konstantenkörper k, K' eine algebraische Erweiterung und $k(Z)$ der Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten Z über k. Eine Gleichung

$$P(x,Z) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0 \ , \quad a_i \in k(Z) \ , \quad a_n = 1 \ ,$$

heißt eine einparametrige Resolvente der Erweiterung $K \subset K'$, wenn es ein

Element $\zeta \in K \backslash k$ gibt, so daß

$$P(x,\zeta) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\zeta)x^i = 0$$

eine Resolvente von K' über K ist, d.h. daß es ein Element $\xi \in K'$ gibt, für daß $P(x,\zeta)$ das Minimalpolynom über K ist.

Kapitel II 2

S. 163, 21: Im Hinblick auf spätere Entwicklungen mag es nützlich sein, die den 60 Kollineationen der alternierenden Gruppe entsprechende vierdimensionale Darstellung

$$\rho : G \longrightarrow GL_4(\mathbb{C})$$

der Ikosaedergruppe G im McKay–Graphen für die binäre Ikosaedergruppe $\hat{G}$ zu identifizieren. Die Gruppe $\hat{G}$ besitzt nur zwei irreduzible Darstellungen von Grad 4, von denen eine treu (auf $S^3(\mathbb{C}^2)$) und die andere nichttreu ist. Bei ρ handelt es sich daher um letztere, $\rho = (4')$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \bullet\, 3' & & & & \\
 & & & & & & & & & & | & & & & \\
* & — & \bullet & — & \bullet & — & \bullet & — & \bullet & — & \bullet & — & \bullet & — & \bullet \\
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 4' & & 2'
\end{array} .$$

Nach Konstruktion ist ρ über $\mathbb{Q}$ definiert.

S. 164, –8: Im Anschluß an Klein liege den folgenden Betrachtungen der Grundkörper $\mathbb{C}$ zugrunde. Sei $P \cong A^4$ der Raum aller Polynome der Form

$$x^5 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \qquad (a_i \in \mathbb{C})$$

und $W \cong A^4$ der Raum der zugehörigen Wurzelquintupel (x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) , $\sum_{i=0}^{4} x_i = 0$. Die Quotientenabbildung

$$q : W \longrightarrow W/S_5 = P$$

induziert dann eine Abbildung

$$\tilde{q} : \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(W)/S_5 = \mathbb{P}(P) \quad ,$$

wobei $\mathbb{P}(W)$ der dreidimensionale projektive Raum zu W und $\mathbb{P}(P)$ der gewichtet projektive Raum zu P ist (P ist gewichtet durch die Grade 2,3,4,5 der elementarsymmetrischen Funktionen, die die Komponenten von q bilden). Sei nun V eine (irreduzible) Varietät (über $\mathbb{C}$) und

$$f(x) = x^5 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0 \quad (A_i \in \mathbb{C}[V])$$

eine Gleichung mit V als Parameterraum. Sei $V' = \{v \in V \mid A_i(v) \neq 0$ für mindestens ein $i\}$. Dann induzieren die Koeffizienten $A_1,\dots,A_4$ einen Morphismus von Varietäten

$$\alpha : V' \longrightarrow \mathbb{P}(P) \ .$$

Die Dimension des Bildes $\alpha(V')$ ist nun die Zahl der Parameter, "wie sie die Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ beeinflussen", und das "Bild" der Gleichung $f(x) = 0$ ist das Urbild $\tilde{q}^{-1}(\alpha(V'))$.

S. 165, 9: Wir behalten die Notationen der vorigen Anmerkung bei. Das Polynom f sei nun irreduzibel über dem Funktionenkörper $\mathbb{C}(V)$ von V . Sei $K = \mathbb{C}(V)[x]/(f)$ die durch f definierte Erweiterung von $\mathbb{C}(V)$ vom Grad 5 und

$\tilde{K} \supset K$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{C}(V)$. Die Galoisgruppe Γ_g der Gleichung $f(x) = 0$ ist dann die Automorphismengruppe von $\tilde{K}$ über $\mathbb{C}(V)$.

Sei V_K die Normalisierung von V in K. Gegebenenfalls nach Verkleinerung von V können wir dann annehmen, daß V_K durch die Gleichung $f(x) = 0$ in $V \times A^1$ definiert wird, und die Überlagerung $\pi : V_K \xhookrightarrow{i} V \times A^1 \xrightarrow{pr_1} V$ unverzweigt ist. Sei $v_0 \in V$ ein fest gewählter Punkt. Die analytische Fortsetzung von Wurzeln von f längs Wegen in V induziert dann eine transitive Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(V,v_0)$ von V auf den Punkten der Faser $\pi^{-1}(v_0)$. Das Bild Γ_m von $\pi_1(V,v_0)$ in der symmetrischen Gruppe S_5 dieser fünf Punkte ist dann die "Monodromiegruppe" der Gleichung $f(x) = 0$. Im Sinne der Theorie der Faserbündel ist Γ_m die Strukturgruppe der Überlagerung $V_K \longrightarrow V$.

Eine Identifikation von Γ_g mit Γ_m ergibt sich durch Betrachtung der Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der endlichen Körpererweiterungen L von $\mathbb{C}(V)$ und der Kategorie der endlichen, irreduziblen, i.a. verzweigten Überlagerungen von V, die über die Zuordnung

$$L \longmapsto V_L = \text{Normalisierung von } V \text{ in } L$$

erhalten wird (vgl. z.B. Grothendieck–Dieudonné [1961 EGA II 6.3]). Indem man zum Ausschluß von Verzweigungspunkten die Varietät V fallsweise verkleinert, entspricht dabei einer Galoiserweiterung L eine Galoisüberlagerung $V_L \longrightarrow V$. In einem solchen Fall stimmen sowohl Γ_g als auch Γ_m mit der Gruppe der Decktransformationen von V_L über V überein. Ist $K \supset \mathbb{C}(V)$ nicht Galois'sch, so identifiziert sich die Monodromiegruppe Γ_m von $V_K \longrightarrow V$ mit der Gruppe der

Decktransformationen der kleinsten Galoisüberlagerung $\tilde{V} \longrightarrow V$, die über $V_K \longrightarrow V$ faktorisiert, d.h. $\Gamma_m = \mathrm{Gal}(\tilde{K}, \mathbb{C}(V))$, wobei $\tilde{K} \supset \mathbb{C}(V)$ die kleinste Galoiserweiterung von $\mathbb{C}(V)$ ist, die K enthält.

S. 165, 22: Bei der Herleitung dieser Behauptung hat man vorauszusetzen, daß die Abbildung α einen birationalen Isomorphismus von V und $\alpha(V')$ induziert (mit den voraufgehenden Bezeichnungen). Wir identifizieren daher V und $\alpha(V')$. Zudem nehmen wir o.B.d.A. an, daß $\tilde{q}^{-1}(V)$ unverzweigt über V ist. Jede irreduzible Komponente C von $\tilde{q}^{-1}(V)$ liefert dann eine Galois'sche Überlagerung von V, deren Decktransformationsgruppe der Stabilisator Γ von C in S_5 ist. Andererseits identifiziert sich die Monodromiegruppe dieser Überlagerung mit Γ_m (analytische Fortsetzung von 5–Tupeln von Wurzeln), also $\Gamma \cong \Gamma_m \cong \Gamma_g$.

Insbesondere läßt sich die Überlagerung $C \longrightarrow V$ mit der Überlagerung $\tilde{V} \longrightarrow V$ der letzten Anmerkung identifizieren. Mittels einer "generischen" Projektion (affin in der Form $(x_0,x_1,\dots,x_4) \longmapsto \tilde{x} = \sum\limits_{i=0} s_i x_i$, $s_i \in \mathbb{C}(V)$, gegeben) kann man auch aus C eine Galoisresolvente von $f(x) = 0$,

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} (y - \gamma(\tilde{x})) = 0 \ ,$$

in der klassischen Weise gewinnen.

S. 170, –17: Eine mögliche Interpretation dieser Ausführungen ist die folgende. Sei $W = \{(x_0,\dots,x_4) \in A_5 \mid \sum\limits_{\nu \in 0} x_\nu = 0\}$ mit der offensichtlichen Permutationsaktion der symmetrischen Gruppe S_5. In der von Klein betrachteten Situation ist eine

Kovariante eine bezüglich S_5 (oder A_5) äquivariante, polynomiale (oder rationale) Abbildung $\varphi : W \longrightarrow W$. Statt diese in den ursprünglichen Koordinaten $x_0,\dots,x_4$ auszuschreiben, kann man sie als Linearkombinatiom

$$\varphi = \sum_{i=1}^{4} P_i \varphi_i$$

von fundamentalen Kovarianten $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ mit invarianten polynomialen (oder rationalen) Koeffizienten P_ν "typisch darstellen". (In der vorliegenden Situation wird der $k[W]^{S_5}$ – Modul $\mathrm{Mor}_{S_5}(W,W)$ aller polynomialen S_5–Kovarianten von den 4 Kovarianten $\varphi_i : W \longrightarrow W$, $\varphi_i(x_0,\dots,x_4) = (x_0^{(i)},\dots,x_4^{(i)})$ frei erzeugt, vgl. unsere Anmerkungen zu I 4).

In der von Klein in der Fußnote zitierten Quelle betrachtet Clebsch die endliche (rationale) Erzeugung aller Kovarianten von binären Formen (bezüglich der Gruppe SL_2 bzw. GL_2). Dabei entwickelt er zahlreiche Beispiele "typischer Darstellungen".

S. 170, –4: Der Ausdruck "genügt" mag an dieser Stelle irreführend sein. Zur Beschreibung einer irreduziblen Komponente einer reduziblen Varietät benötigt man neben den Gleichungen für die Varietät zusätzliche Gleichungen.

S. 171, 6: In heutiger Terminologie formuliert übersieht hier Klein die Tatsache, daß ein "reguläres Gebilde" nur durch ein invariantes Ideal, aber nicht unbedingt durch invariante Gleichungen beschrieben wird (z.B. ist der Durchschnitt zweier assoziierter halbregulärer Gebilde selbst regulär). Bei der sich anschließenden Konklusion (Zeilen 11 ff.) ist dies allerdings ohne Belang, da dort nur die andere, offensichtliche Richtung der behaupteten Äquivalenz benötigt wird.

S. 175, 3: Hier benutzt Klein die Tatsache, daß sich alle Kovarianten $\varphi : A^4 \longrightarrow A^4$ (bzgl. der durch die Permutationsaktion von S_5 auf A^5 induzierten Aktion auf der Hyperebene $A^4 = \{(x_0,\dots,x_4) \mid \sum_{\nu=0}^{4} x_\nu = 0\}$) als Tschirnhaustransformation schreiben lassen, vgl. unsere diesbezüglichen Anmerkungen zu S. 90 u. 170.

S. 175, 21: In heutiger Terminologie leitet Klein hier die Äquivalenz der Darstellung von S_5 auf A^5 (oder A^4, wie oben) mit ihrer kontragredienten auf dem Dualraum her. Dazu benutzt er die S_5–invariante quadratische Form $\sum_{\nu=0}^{4} x_\nu^2$.

S. 175, –6: Die in diesem Paragraphen geschilderten Sachverhalte werden heutzutage im Rahmen der "äußeren Algebra" abgehandelt. Für eine geometrische und weiterführende Darstellung vgl. z.B. Griffith–Harris [1978 I 5, VI 2].

S. 178, 13: Diese Gleichungen haben also die Gestalt

$$\prod_{i \neq j}(X-a_{ij}) = \prod_{i<j}(X^2-(a_{ij})^2) = 0 .$$

S. 178, –1: Mit den Formeln (31) und (32) beschreibt Klein alle Kovarianten $\psi : A^4 \longrightarrow A^6 = \Lambda^2 A^4$ bezüglich der Aktionen von S_5 (auf A^6 durch die Realisierung als äußere Potenz $\Lambda^2 A^4$). Sind $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ fundamentale S_5–Kovarianten $A^4 \longrightarrow A^4$, so erhält man mit $\varphi_i \wedge \varphi_j$, $i < j$, sechs Kovarianten $A^4 \longrightarrow \Lambda^2 A^4$. Mittels der Kovariantentheorie der Spiegelungsgruppe S_5 auf A^4 (vgl. z.B. Bourbaki [1968], V § 5) kann man zeigen, daß diese fundamental sind, d.h. daß sich jede

S_5–Kovariante $A^4 \longrightarrow \Lambda^2 A^4$ wie in Formel (32) ausdrücken läßt. Die erforderlichen Modifikationen bei Betrachtung der Untergruppe A_5 sind trivial herzuleiten (man beachte jedoch daß die Darstellung von A_5 auf $\Lambda^2 A^4$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ in zwei dreidimensionale Untermoduln zerfällt, vgl. dazu auch S. 181).

Ist $(x_0,\dots,x_4)$, $\sum x_\nu = 0$, ein "allgemeiner" Punkt des A^4 , und sind a_{ij} , $i \neq j$, die pentraedischen Koordinaten eines dem Punkt $(x_0,\dots,x_4)$ gemäß Formel (32) zugeordneten, genügend allgemeinen Geradenkomplexes so ist die Gleichung

$$\prod_{i \neq j} (X - a_{ij}) = 0$$

eine Resolvente der Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{4} (Y - x_\nu) = 0 \ .$$

Dies ergibt sich aus der Transitivität der Permutationsaktion von S_5 auf den Paaren (i,j) , $i \neq j$, und den pentraedischen Koordinaten a_{ij} , $i \neq j$.

S. 179, 4: Diese Flächen werden bald (Zeile 8) als nichtsingulär vorausgesetzt. Für die Herleitung einiger, im folgenden benutzter Eigenschaften solcher Flächen vgl. man z.B. Griffith–Harris [1978 IV 1].

S. 180, 13: Aus heutiger gruppentheoretischer Sicht handelt es sich hierbei um den Isomorphismus der projektiven orthogonalen Gruppe $PO_4(k)$ mit einem semidirekten Produkt $(PGL_2(k) \times PGL_2(k)) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (k algebraisch abgeschlossen, $\mathrm{char}(k) \neq 2$; $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ operiert durch Vertauschung der Faktoren).

Kapitel II 3

S. 182, 2: Für eine kurz gefaßte Erläuterung der Hauptideen dieses Kapitels vgl. den Abschnitt 5 unserer Einführung.

S. 189, 11: Aus darstellungstheoretischer und geometrischer Sicht stellt sich die jetzige Situation folgendermaßen dar: Seien V und V' die beiden nichtäquivalenten, zweidimensionalen und irreduziblen Darstellungen der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$ (i.e. $V = (2)$, $V' = (2')$ in der Notation unserer Anmerkungen zu S. 63). Beide Darstellungen sind über $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$, definiert. Dem McKay–Graph von $\hat{G}$ entnehmen wir, daß das Tensorprodukt $V \otimes V'$ eine vierdimensionale irreduzible Darstellung ist, die über die Ikosaedergruppe G faktorisiert und durch die Permutationsaktion von A_5 auf der Hyperebene $W = \{\sum x_\nu = 0\} \subset \mathbb{A}^5$ realisiert wird. Diese Darstellungen induzieren G–Aktionen auf den zugehörigen projektiven Räumen

$$\mathbb{P}^1_{(1)} = \mathbb{P}(V)\,,\ \mathbb{P}^1_{(2)} = \mathbb{P}(V')\,,\ \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(W)$$

(die ersten beiden sind über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, die letzte über $\mathbb{Q}$ definiert). Die Segré–Einbettung

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V') \hookrightarrow \mathbb{P}(V \otimes V') = \mathbb{P}(W)$$

liefert dann einen G–äquivarianten Isomorphismus des Produktes $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$ auf die Hauptfläche $Q \subset \mathbb{P}^3$.

S. 190, 18: Es mag zur Klärung der jetzt und später auftretenden Formeln beitragen, wenn wir sie mittels der ihnen entsprechenden Abbildungen interpretieren. Durch die Formel (27) wird eine bihomogene, über $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ definierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^5 \\ ((\lambda_1,\lambda_2),(m,n)) & \longmapsto & (y_0,\dots,y_4) \end{array}$$

definiert, die äquivariant bezüglich der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$ ist, sofern diese auf dem linken Faktor V über die Darstellung (2), auf dem rechten Faktor $\mathbb{A}^2$ trivial und auf $\mathbb{A}^5$ als Permutationsgruppe A_5 operiert.
Durch Übergang zu den projektiven Räumen erhalten wir eine G–äquivariante, rationale Abbildung

$$\eta : \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^4$$

(Formeln (19), (26)), deren "Bild" in der Hauptfläche $Q \subset \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ liegt. (Unsere Behauptung in Slodowy [1986 S. 99], daß diese Abbildung wohldefiniert, also regulär, sei, ist nicht korrekt, vgl. die folgenden Ausführungen). Die Komposition Φ von η mit der inversen der Segré–Einbettung (gegeben durch die Formeln (14), (15)) hat dann aufgrund der Formeln (21)–(25) die Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} \Phi : \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)} \\ (\lambda,(m:n)) & & \longmapsto & & (\lambda,\varphi_\lambda(m:n)) \quad , \end{array}$$

wobei $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ und $\varphi_\lambda : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)}$ eine i.a. rationale Abbildung ist, die von der linearen Abbildung $\tilde{\varphi}_{(\lambda_1,\lambda_2)} : \mathbf{A}^2 \longrightarrow V'$

$$(m,n) \longmapsto (R(\lambda_1,\lambda_2,m,n)\ ,\ S(\lambda_1,\lambda_2,m,n))$$

induziert wird. Mittels der Formeln (47), (48) des Paragraphen 6 läßt sich diese lineare Abbildung weiter explizieren, i.e. $\tilde{\varphi}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ wird durch eine Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu_2} & \frac{\partial M}{\partial \mu_2} \\ -\frac{\partial N}{\partial \mu_1} & -\frac{\partial M}{\partial \mu_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 12f^2 \end{bmatrix}$$

gegeben, deren Determinante sich als $-12\ H.T.f^2$ berechnet (vgl. S. 197, Fußnote).

S. 190, –8: Diese und die unmittelbar folgenden Behauptungen Kleins sind, wörtlich genommen, nicht ganz korrekt, da die rationale Abbildung η zwar ein birationaler, aber kein regulärer Isomorphismus ist. Wie Kleins voraufgehende Bemerkungen über das Absinken der Ordnung gewisser Kurven (27) belegen, ist er sich dieser Sachlage durchaus bewußt.

Mit den Notationen unserer vorigen Anmerkung läßt sich das Verhalten von Φ (und damit von η) folgendermaßen beschreiben:

Verschwinden weder f noch H noch T in $\lambda \in \mathbb{P}^1_{(1)}$, so ist die Faserabbildung

$$\varphi_\lambda : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)}$$

ein Isomorphismus. Verschwindet dagegen eine dieser Funktionen, so hat die Matrix

$\tilde{\varphi}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ den Rang 1. In diesem Fall besitzt die rationale "Abbildung" $\varphi_\lambda : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)}$ eine Unbestimmtheitsstelle (die durch den Kern von $\tilde{\varphi}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ gegeben wird), und sie bildet das Komplement dieser Stelle auf einen Punkt in $\mathbb{P}^1_{(2)}$ ab (der dem Bild von $\tilde{\varphi}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ entspricht). Unter anderem läßt sich Φ zu einer wohldefinierten Abbildung liften, wenn man die $12 + 20 + 30$ Unbestimmtheitsstellen aufbläst.

Wir können uns auch leicht davon überzeugen, daß es keinen G–äquivarianten, regulären Isomorphismus $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$ geben kann. Während auf $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1$ insgesamt $12 + 20 + 30$ Geraden mit nicht–trivialer Punktisotropie ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) liegen, gibt es auf $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$ nur $2 \cdot (12 + 20 + 30)$ isolierte Punkte mit entsprechender Isotropie. Jede G–äquivariante Abbildung muß daher die genannten Geraden in entsprechende Punkte kontrahieren.

S. 191, 11: Mit unseren oben eingeführten Bzeichnungen bemerkt hier Klein zunächst, daß die Formel (26) eine birationale Abbildung $\tilde{\eta} : \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{A}^2 \longrightarrow \tilde{Q}$ definiert (wie in unserer Einführung bezeichnet $\tilde{Q}$ den affinen Kegel über der Hauptfläche Q). Infolge der G–Äquivarianz induziert $\tilde{\eta}$ einen birationalen Isomorphismus $\bar{\eta}$ der Quotientenräume

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{A}^2 & \xrightarrow{\quad\tilde{\eta}\quad} & \tilde{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{P}^1_{(1)}/G) \times \mathbb{A}^2 = (\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{A}^2)/G & \xrightarrow{\quad\bar{\eta}\quad} & \tilde{Q}/G \end{array} .$$

Während wir auf $\mathbb{P}^1_{(1)}/G$ die Koordinate Z und auf $\mathbb{A}^2$ die Koordinaten m und n haben, läßt sich $\tilde{Q}/G$ mittels Gleichung (3), S. 182, als Hyperfläche im $\mathbb{A}^4$ mit

Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$ realisieren. Aufgrund der Birationalität von $\bar{\eta}$ sind dann Z, m, n rationale Funktionen in $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$.

S. 191, –10: Der Gebrauch des Begriffes "kontragredient" an dieser und späteren Stellen deckt sich leider nicht mehr mit dem heutigen. Während man heute die Darstellung auf dem Dualraum einer gegebenen Darstellung kontragredient zu der letzteren nennt, würde man in Kleins Situation eher von (mittels äußerer Automorphismen) "konjugierter" Darstellungen sprechen. Die Darstellungen V und V' sind im heutigen Sinne selbstdual.

S. 192, 17: Im Lichte unserer obigen Anmerkungen ist diese Behauptung nicht ganz korrekt, da die "Abbildung" $\eta : \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow Q$ nicht surjektiv ist. Die "Bilder" der Hauptgleichungen, die außerhalb des Bildes von η liegen, sind im wesentlichen durch die Bedingung $Z_1 \in \{0,1,\infty\}$ charakterisiert. Sofern $Z_2 \notin \{0,1,\infty\}$ gilt, könnte man die Rollen von λ und μ vertauschen. Andererseits sieht man leicht, daß die fraglichen Gleichungen algebraisch auflösbar sind, also eine Galoisgruppe (über $\mathbb{Q}(\varepsilon,\nabla)$) besitzen, dir echt kleiner als A_5 ist. Dazu beachte man daß die Punkte $\lambda \in \mathbb{P}^1_{(1)}$ mit $Z_1(\lambda) \in \{0,1,\infty\}$, also mit $T(\lambda)\cdot H(\lambda)\cdot f(\lambda) = 0$, entweder in $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ $(f(\lambda) = 0)$ oder in einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ liegen (als Fixpunkte von Elementen in $PGL_2(\mathbb{Q}(\varepsilon))$). Wir können daher o.B.d.A. annehmen daß das Element

$$\lambda = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4}{y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4}$$

von der Galoisgruppe der Gleichung fixiert wird. Dann kann diese aber nicht die gerade Permutation $S = (1\,2\,3\,4\,5)$ enthalten, unter der λ in $\varepsilon\lambda$ transformiert wird.

S. 192, –4: Zu diesem Vergleich ziehe man die Formel (34) von S. 106 heran.

S. 193, 1: Dieser Satz sollte offensichtlich lauten: "Aus den drei Gleichungen (31) ...". In den Darstellungen der Klein'schen Theorie bei Weber [1899 § 129], Dickson [1930 §§ 132, 133] und Vivanti [1906 Art. 156] werden die folgenden Rechnungen ausführlicher reproduziert.

S. 194, 18: Sofern man sich für explizite Formeln im Fall $\alpha = 0$ interessiert (wie z.B. in § 14), hat man die Formeln (35)–(37) korrekt zu spezialisieren. Das Ergebnis ist

$$m = \frac{-\gamma}{12\beta}, \quad Z = -\frac{1}{1728} \cdot \frac{(5\gamma^2 \pm 3\nabla)^3}{4\beta^5(\gamma^2 \mp \nabla)}, \quad n = \frac{\gamma}{18\beta} \cdot \frac{(11\gamma^2 \mp 9\nabla)}{(3\gamma^2 \mp \nabla)} .$$

S. 195, 17: Aus heutiger Sicht ist diesen Überlegungen entgegenzuhalten, daß sich jede G–Invariante in dem Quotientenring $k[y_0,\ldots,y_4]/(\Sigma y_\nu, \Sigma y_\nu^2)$ durch eine G–Invariante in $k[y_0,\ldots,y_4]$ repräsentieren läßt ($k \supset \mathbb{Q}(\epsilon)$, vollständige Reduzibilität von G über k).

S. 195, –6: In der Sprache der modernen algebraischen Geometrie kann man diesen Wechsel der Betrachtung folgendermaßen umschreiben:
Sei $Q = \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^2_{(2)}$ die Hauptfläche mit den natürlichen Projektionen $p_i : Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(i)}$, $i = 1,2$, und den fundamentalen Geradenbündeln $\mathscr{L}_i = p_i^* \mathcal{O}(1)$.
Sei $k \supset \mathbb{Q}(\varepsilon)$ der Grundkörper. Anstelle des homogenen Koordinatenrings A der durch $\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$ gegebenen projektiven Einbettung $Q \hookrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(W)$,

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(Q,(\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2)^n) \cong k[y_0,\dots,y_4]/(\sum y_\nu, \sum y_\nu^2) \ ,$$

betrachtet Gordan den "bihomogenen" Koordinatenring

$$B = (\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(Q, \mathscr{L}_1{}^n)) \otimes (\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(Q, \mathscr{L}_2{}^n)) \cong$$

$$\cong k[V] \otimes k[V'] \equiv k[V \times V'] \ ,$$

der im Gegensatz zu A ein freier Polynomring, und damit für die "formale" Invariantentheorie "besser" geeignet ist. Obwohl von Klein nicht explizit hervorgehoben, sind es die bihomogenen Funktionen $V \times V' \longrightarrow k$, d.h. diejenigen, die bzgl. V und V' homogen von nicht notwendig gleichem Grad sind, die in der Folge von Interesse sind. So ist die G–äquivariante Einbettung $Q \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$ durch die bilinearen Funktionen $p_1,\dots,p_4$ (Formel (39)) vermittelt, entsprechend dem darstellungsgtheoretischen Isomorphismus $V^* \otimes V'^* \cong V \otimes V' \cong W$.

S. 198, –17: Die Formeln (49)–(51) definieren eine nichttriviale zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{S}_5 \longrightarrow S_5 \longrightarrow 1$$

der symmetrischen Gruppe S_5. Nach Konstruktion identifiziert sich die induzierte Aktion auf den bilinearen Funktionen $V^* \otimes V'^*$ mit der Permutationsaktion von S_5 auf $W = \{(y_0,\dots,y_4) \in \mathbb{A}^5 \mid \sum y_\nu = 0\}$.

S. 202, 3: Hier ist F von vornherein als bihomogen vorausgesetzt (vgl. auch unsere Anmerkungen zu S. 195).

S. 202, –4: Zur Klärung auch anderer Sachverhalte (s. S. 205) seien diese Ausführungen weiter kommentiert. Sei $F \in k[V \times V']$ bihomogen, $\hat{G}$–invariant und linear auf V' (wie z.B. M_1, N_1 oder das Polynom aus Formel (59)). Das Nullstellengebilde von F auf $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$ läßt sich dann als Graph $\Gamma_\psi = \{(\lambda,\psi(\lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{P}^1_{(1)}\}$ einer G–äquivarianten Abbildung

$$\psi : \mathbb{P}^1_{(1)} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)}\,,\ \lambda = \lambda_1/\lambda_2 \longmapsto \frac{\partial F}{\partial \mu_2} \Big/ -\frac{\partial F}{\partial \mu_1}\ ,$$

wie auch als Bild der G–äquivarianten Abbildung

$$\mathrm{id} \times \psi : \mathbb{P}^1_{(1)} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}\,,\ \lambda \longmapsto (\lambda,\psi(\lambda))\ ,$$

auffassen. Durch Komposition mit der Segré–Einbettung liefert letztere eine G–äquivariante Abbildung

$$\mathbb{P}^1_{(1)} \longrightarrow Q \subset \mathbb{P}^3\ .$$

In diesem Sinne korrespondiert der Gleichung (59) die halbreguläre Kurve (27) (beide für das gleiche, feste (m,n)). Die Abbildung $\psi : \mathbb{P}^1_{(1)} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)}$ selbst wird von der $\hat{G}$–Kovarianten

$$\tilde{\psi} : V \longrightarrow V'\ ,\ (\lambda_1,\lambda_2) \longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial \mu_2}, -\frac{\partial F}{\partial \mu_1}\right)\ ,$$

durch Übergang zu den projektiven Räumen induziert.

Umgekehrt liefert jede (homogene) $\hat{G}$–Kovariante $\tilde{\psi} : V \longrightarrow V'$, $(\lambda_1,\lambda_2) \longmapsto (d_1,d_2)$, durch $F = d_1 \cdot \mu_2 - d_2\mu_1$ eine bihomogene, auf V' lineare $\hat{G}$–Invariante. Beachten wir daß der $\hat{G}$–Modul V' mittels der $\hat{G}$–invarianten (ja sogar $SL(V')$–invariantem) Bilinearform $\omega : V' \times V' \longrightarrow k$, $\omega((\mu_1',\mu_2'),(\mu_1,\mu_2)) = \mu_1'\mu_2 - \mu_2'\mu_1$, zu seinem Dualraum V'^* $\hat{G}$–isomorph wird, so beruht diese Entsprechung $F \longleftrightarrow \tilde{\psi}$ auf den Isomorphismen

$$(k[V \times V']_{(n,1)})^{\hat{G}} \cong (k[V]_{(n)} \otimes V'^*)^{\hat{G}} \cong$$

$$\cong \mathrm{Mor}_{\hat{G}}(V,V'^*)_{(n)} \cong \mathrm{Mor}_{\hat{G}}(V,V')_{(n)}$$

(hier bezeichnet $(n,1)$ bzw. (n) den Bigrad bzw. den Grad der betrachteten Polynome oder Abbildungen).

S. 204, 19: Diese vier Invarianten entsprechen vier fundamentalen G–Kovariantem $V \longrightarrow V'$ mit den Graden 7, 13, 17, 23, aus denen sich alle polynomialen G–Kovarianten $V \longrightarrow V'$ linear über $k[V]^G$ kombinieren lassen. Für neuere, umfangreichere Informationen über G–Kovarianten vgl. Knörrer [1985_a], Kostant [1985], Springer [1987].

S. 204, –7: Formel (61) läßt sich folgendermaßen begründen:

Sei $k(V)$ der Funktionenkörper von V, d.h. der Körper aller rationalen Funktionen in λ_1, λ_2 und $E = k(V) \otimes_k V'^*$ der $k(V)$–Vektorraum der linearen Formen auf V'. Dann bilden die Linearformen μ_1, μ_2 eine Basis von E, bezüglich der sich jedes Element $F \in E$ in der Form

$$F = \frac{\partial F}{\partial \mu_1} \cdot \mu_1 + \frac{\partial F}{\partial \mu_2} \cdot \mu_2$$

schreiben läßt. Ist nun $\{F_1, F_2\}$ eine andere Basis von E, so erhält man eine Darstellung

$$F = c_1 \cdot F_1 + c_2 \cdot F_2 \ , \quad c_i \in k(V) \ ,$$

durch Lösung eines linearen Gleichungssystems. Die dabei benutzte Cramer'sche Regel interpretiert sich symbolisch durch das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \mu_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \mu_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \mu_2} \end{vmatrix}$$

S. 204, Fußnote *): Diesen Sachverhalt haben wir schon bei unserer Diskussion der Abbildungen Φ und φ_λ erkannt (vgl. die Anmerkungen zu S. 190).

S. 205, –3 Im Zusammenhang mit unseren Anmerkungen zu S. 202 werden diese Ausführungen vielleicht etwas klarer, wenn wir die G–äquivariante, rationale Abbildung

$$\Phi : \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$$

(vgl. die Anmerkungen zu S. 190) als durch $\mathbb{P}^1$ parametrisierte Schar von G–äquivarianten Abbildungen

$$\psi_{(m:n)} : \mathbb{P}^1_{(1)} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)} \ ,$$

$$\Phi((\lambda_1:\lambda_2),(m:n)) = ((\lambda_1:\lambda_2),\psi_{(m:n)}(\lambda_1:\lambda_2))$$

auffassen. Jede Abbildung $\psi_{(m:n)}$ wird dann durch eine $\hat{G}$–Kovariante

$$\tilde{\psi}_{(m,n)} : V \longrightarrow V'$$

der Form

$$\tilde{\psi}_{(m,n)} = m \cdot \frac{12f}{H} \Psi_7 + n \cdot \frac{144f^3}{HT} \cdot \Psi_{13} \ ,$$

oder, in stärkerer Anlehnung an (59), von der Form

$$\tilde{\psi}_{(m,n)} = m \cdot T \cdot \Psi_7 + n \cdot 12 \cdot f^2 \Psi_{13}$$

induziert, wobei Ψ_7 , $\Psi_{13} : V \longrightarrow V'$ die fundamentalen Kovarianten

$$\Psi_7(\lambda_1,\lambda_2) = (\frac{\partial N_1}{\partial \mu_2}, -\frac{\partial N_1}{\partial \mu_1})$$

$$\Psi_{13}(\lambda_1,\lambda_2) = (\frac{\partial M_1}{\partial \mu_2}, -\frac{\partial M_1}{\partial \mu_1})$$

vom Grad 7 und 13 sind. Jede rationale Kovariante $V \longrightarrow V'$ läßt sich als

$k(V)^{\hat{G}}$–Linearkombination dieser beiden Kovarianten "typisch darstellen".

S. 208, –1: Denn die "Kenntnis" der Quadratwurzel aus der Diskriminante der Bring'schen Gleichung ist äquivalent zur Kenntnis einer der beiden Erzeuger von Q, auf denen das Bild der Gleichung liegt.

S. 210, 5: Hier benutze man die Formel für Z aus unserer Anmerkung zu S. 194.

Kapitel II 4

S. 212, 8: Ähnlich wie in Kapitel II 3 (vgl. unsere Anmerkung zu S. 189) können wir die vorliegende Situation darstellungstheoretisch interpretieren. Sei V eine zweidimensionale irreduzible Darstellung der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$ (i.e. $V = (2)$, definiert über $\mathbb{Q}(\epsilon)$). Das Tensorprodukt $V \otimes V$ zerfällt dann in zwei Summanden

$$\Lambda^2(V) \oplus S^2(V) \quad ,$$

wobei $\Lambda^2(V)$ die triviale Darstellung (1) und $S^2(V)$ eine irreduzible dreidimensionale Darstellung (i.e. (3) bei der Wahl $V = (2)$) realisiert (vgl. den Mc Kay–Graph). Die Darstellung auf $S^2(V)$ ist über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ definiert. Aus geometrischer Sicht haben wir die folgenden Analogien. In II 3 führte der Isomorphismus

$$V \otimes V' \xrightarrow{\sim} W$$

zur Segré–Einbettung

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V') \hookrightarrow \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^3 ,$$

deren Bild sich mit der Hauptfläche Q identifiziert. Entsprechend ergab sich eine Äquivalenz zwischen dem "projektiven" Formenproblem (i.e. dem Gleichungssystem i.S. von S. 124) zu $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V') \longrightarrow (\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V'))/G$ und dem zu $Q \longrightarrow Q/G$, i.e. dem der Lösung der Hauptgleichungen bei bekannter Diskriminante. Nun induziert die G–äquivariante Projektion

$$V \otimes V \longrightarrow S^2(V)$$

eine doppelte, G–äquivariante, verzweigte Überlagerung

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S^2(V)) = \mathbb{P}^2 ,$$

die die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ als symmetrisches Produkt von $\mathbb{P}(V)$ mit sich realisiert (diese Überlagerung ist verzweigt längs eines Kegelschnitts in $\mathbb{P}^2$, dessen Urbild gerade die Diagonale in $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$ ist). Wir erhalten damit eine "Reduktion" des projektiven Formenproblems zu $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \longrightarrow (\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V))/G$ auf das projektive ternäre Formenproblem $\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2/G$, dem sich die folgenden Paragraphen widmen werden.

S. 212, Fußnote **): In dieser Arbeit betrachtet Hesse die projektive Ebene als symmetrisches Produkt der projektiven Geraden mit sich.

S. 214, 10: Genauer folgt aus den Formeln (1) und (6) daß
$4A = (\lambda_1\lambda_2'-\lambda_2\lambda_1')^2$.

S. 215, 6: Ist φ eine homogene Form vom Grad 2m in λ_1, λ_2, so ist die m–te Polarisierung von φ symmetrisch bzgl. der Vertauschung von (λ_1,λ_2) und (λ_1',λ_2'). Dies läßt sich z.B. leicht mit den Argumenten der "symbolischen Methode" verifizieren.

S. 216, Fußnote *): Im zweiten Absatz zeigt Klein mittels eines Koordinatenwechsels daß die Darstellung von G auf $S^2(V)$ ($\cong \mathbb{C}^3$, bei Klein) die Komplexifizierung der gewöhnlichen reellen Darstellung durch Rotationen eines Ikosaeders im $\mathbb{R}^3$ ist (vgl. dazu auch unsere Anmerkungen zu I1, §§ 4,5,6).

S. 217, 3: Im Sinne unserer früheren Anmerkungen liefert Klein hier eine explizite Beschreibung der doppelten Überlagerung $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^2$, deren Verzweigungsort der Kegelschnitt $\{A = 0\}$ ist.

S. 219, 5: Hier wendet Klein die (allgemeinen) Plückerformeln an (vgl. z.B. Griffith–Harris [1978 Ch. 2.4] oder Brieskorn–Knörrer [1981 Kap. 9.1]).

S. 220, 6: Bei geschickterer Wahl der Koordinaten wäre die Adjunktion von $\sqrt{5}$ ausreichend.

S. 222, 2: Den Begriff der Resolventen des Problems der A kann man präzise fassen, wenn man darunter eine Resolvente für die Galoiserweiterung $k(A_0,A_1,A_2)^G \subset k(A_0,A_1,A_2)$ versteht. Aus Kleins geometrischer Sicht läßt sich eine solche Resolvente mittels einer regulären (oder rationalen) G–Kovarianten

$$\varphi : S^2(V) \longrightarrow P$$

in eine transitive Permutationsdarstellung P gewinnen (ist k der zugrundegelegte Grundkörper, so gilt $P \cong k^n$, wobei G die Koordinaten permutiert). Man kann φ oder jede ihrer Komponenten φ_i, $i = 1,\ldots,n$, eine Solvente des Problems der A nennen. Die zugehörige Resolvente ist dann

$$\prod_{i=1}^{n} (X-\varphi_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j = 0 \ .$$

Hierbei sind die elementarsymmetrischen Funktionen a_j der φ_i reguläre (oder rationale) Funktionen in den fundamentalen Invarianten A,B,C,D des Problems der A.

S. 224, 14: Hier ist die Gruppe der Gleichung (26) über dem Grundkörper $k(A_0,A_1,A_2)^G = k(A,B,C,D)$ gemeint.

S. 227, 7: Auf die gerade angeschnittenen Sachverhalte ist Klein etwas ausführlicher in seiner Arbeit $[1877_c]$ eingegangen (man beachte daß das Ziel der Paragraphen 6 und 7 die Interpretation der historisch vorgängigen Entwicklungen von Brioschi und Kronecker im Lichte der Ikosaedertheorie ist). Betreffend der Geometrie der Clebsch'schen Diagonalfläche, die ein vielstudiertes Beispiel aus der Theorie der algebraischen Flächen ist, vgl. man Klein [1873], Fischer [1986], sowie die dort angeführte Literatur. Erwähnenswert ist das Auftreten dieser Fläche in neueren Untersuchungen über elliptische und Hilbert'sche Modulflächen (Naruki [1978], Burns [1983], Hirzebruch [1976], [1977], [1981]) sowie über das

Horrocks–Mumford–Bündel (vgl. dazu Hulek [1989] und die dort aufgeführten Referenzen).

Die Invariantentheorie und Geometrie der Aktion der Ikosaedergruppe G auf $S^2(V)$ wird von Sekiguchi–Yano [1979] im Zusammenhang mit den Coxetergruppen der Typen H_3 (erweiterte Ikosaedergruppe im Sinne von I 1 § 12), D_6 (Jacobi'sche Gleichungen) und E_6 (Clebsch'sche Diagonalfläche) studiert. Schließlich sei erwähnt, daß sich in Analogie zu Kleins geometrischer Theorie der Hauptgleichungen (II 3) eine entsprechende Theorie der Diagonalgleichung entwickeln läßt, bei der die Diagonalfläche die Rolle der Hauptfläche Q übernimmt. Für eine diesbezügliche Skizze, die Elemente dieses Kapitels, II 4, verwendet, vgl. man Slodowy [1986 Anhang II].

S. 227, 20: Insofern Klein die Jacobischen Gleichungen der Untersuchungen von Brioschi und Kronecker durch sein "Problem der A" ersetzt, wird die Rolle der Tschirnhaustransformationen dieser Gleichungen (S_6–äquivariante Morphismen des Raumes der Wurzelsextupel) nun durch G–äquivariante (rationale) Abbildungen

$$S^2(V) \longrightarrow S^2(V)$$

oder

$$S^2(V) \longrightarrow S^2(V')$$

übernommen.

S. 228, 3: Im folgenden vergleiche man unsere Anmerkungen zu den entsprechenden Passagen in II 3, vor allem zu den Seiten 202 und 204.

S. 230, 12: Ähnlich wie die zweidimensionale G–Darstellung $V = (2)$ (bzw. $V' = (2')$) selbstdual ist aufgrund der Existenz einer G–invarianten symplektischen Form, so ist die dreidimensionale Darstellung $S^2(V) = (3)$ (bzw. $S^2(V') = (3')$) selbstdual aufgrund der Existenz einer G–invarianten quadratischen Form, die bei Kleins Koordinatenwahl durch $A_0^2 + A_1A_2$ (bzw. $B_0^2 + B_1A_2$) gegeben wird. Unsere Anmerkungen zu S. 202 u. S. 204 übertragen sich dann sinngemäß auf die Ausführungen in diesem Paragraphen.

S. 233, –13: Aus heutiger Sicht hat Klein hier bewiesen, daß die Gruppe der äußeren Automorphismen $\mathrm{Aut}(G)/G$ der Ikosaedergruppe G isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Darauf daß die Begriffe der Kogredienz und Kontragredienz heute einen anderen Sinn besitzen, haben wir bereits in einer Anmerkung zu S. 191 hingewiesen.

S. 234, 11: Vgl. hierzu auch unsere Anmerkungen zu den Seiten 90, 202, 204 und 230.

S. 234; Fußnote **): Gemeint sind die Entwicklungen in II 1, § 5 (nicht § 6).

S. 235, 3: Dabei werden von den vorhergehenden Entwicklungen der §§ 8,9,10 nur die Formeln (35) benötigt.

S. 235, 25: Die folgende Interpretation mag zu einer ersten Klärung der im folgenden (§§ 11,12) sehr rasch hergeleiteten Formeln beitragen:
Sei $\mathfrak{S} \subset V \otimes V$ der Segrékegel der zerlegbaren Tensoren (i.e. das Bild der bilinearen Abbildung $V \times V \longrightarrow V \otimes V$, $(v,w) \longmapsto v \otimes w$). Ergänzen wir die Klein'schen Koordinaten A_0, A_1, A_2 auf $S^2(V)$ (Formeln (49)) durch die G–invariante

Koordinate $A_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1')$ auf $\Lambda^2(V)$, so wird $\tilde{S}$ durch die Gleichung

$$A_3^2 = A = A_0^2 + A_1A_2$$

definiert. Die Projektion von $\tilde{S}$ auf $S^2(V)$ längs $\Lambda^2(V)$ ("Symmetrisierung der Tensoren") liefert eine doppelte, längs $\{A = 0\}$ verzweigte Überlagerung, die nach Übergang zu den projektiven Varietäten die früher betrachtete Abbildung

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\sim"] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{P}(S^2(V)) = \mathbb{P}^2 \\
& \mathbb{P}(\tilde{S}) \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
& \mathbb{P}(V \otimes V) &
\end{tikzcd}$$

induziert.

Klein ersetzt nun das Formenproblem der A, i.e. das zum Quotienten $S^2(V) \longrightarrow S^2(V)/G$, durch das Formenproblem zu $\tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}/G$. Für die G–invarianten regulären Funktionen auf $\tilde{S}$ gilt

$$k[\tilde{S}]^G = (k[A_0,A_1,A_2,A_3]/(A_3^2-A))^G = k[\sqrt{A},B,C,D]/(D^2-\ldots) \ .$$

Aus körpertheoretischer Sicht entspricht diesem Wechsel des Formenproblems die Adjunktion der Quadratwurzel $\sqrt{A}$ zum Funktionenkörper $k(A_0,A_1,A_2)^G = k(A,B,C,D)$. Da $\sqrt{A}$ nicht in $k(A_0,A_1,A_2)$ liegt, ist diese Wurzel akzessorisch (vgl. auch Kleins diesbezügliche Ausführung auf S. 238). Das neue Formenproblem läßt sich mittels einer G–äquivarianten, birationalen "Abbildung"

$$
\begin{aligned}
\alpha : \mathfrak{S} &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{A}^2 \\
(A_0,A_1,A_2,A_3) &\longmapsto ((\lambda_1:\lambda_2),\mu,\nu)
\end{aligned}
$$

auf die Ikosaedergleichung, i.e. das projektive Formenproblem zu $\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)/G$, $(\lambda_1:\lambda_2) \longmapsto Z(\lambda_1:\lambda_2)$, reduzieren. Dabei operiert G trivial auf dem Faktor $\mathbb{A}^2$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}(V) \times \mathbb{A}^2 \arrow[d] \\
\mathfrak{S}/G \arrow[r, "\beta"] & (\mathbb{P}(V)/G) \times \mathbb{A}^2
\end{tikzcd}
,
$$

in dem die vertikalen Pfeile die Quotientenabbildungen und β die von α induzierte birationale Abbildung auf den Quotienten ist. Ist $y \in \mathfrak{S}/G$, so erhält man ein Urbild $x \in \mathfrak{S}$ indem man zunächst die Gleichung $(Z(\lambda_1:\lambda_2),\mu,\nu) = \beta(x)$ löst (eine Ikosaedergleichung) und dann $x = \alpha^{-1}((\lambda_1:\lambda_2),\mu,\nu)$ setzt (vorausgesetzt daß die birationalen Abbildungen β und α^{-1} in den relevanten Punkten definiert sind). Klein gibt nur eine implizite Definition von α. Explizit hat sie die folgende Form:

$$
\alpha(A_0,A_1,A_2,A_3) = \left[\frac{A_3-A_0}{A_1}, A_3, \rho_1\right] ,
$$

wobei ρ_1 der Ausdruck von Formel (55) in der Gestalt von Formel (56) (§ 12) ist. Die Abbildung β wird gegeben durch die Angabe der drei Koordinatenfunktionen

$Z_1 \in k(\mathfrak{S})^G$	in Formel (54),
$\mu = A_3 = \sqrt{A} \in k(\mathfrak{S})^G$	in Formel (50),
$\nu = \rho_1 \in k(\mathfrak{S})^G$	in Formel (56).

(Man beachte daß P_1 (S. 237) nicht in $k(\check{S})$ liegt und zur besseren Übersicht immer durch ρ_1 (Formel (55)) ersetzt werden sollte.) Die Umkehrabbildung α^{-1} wird schließlich durch die Formeln (59) geliefert, die korrigiert und auf unsere Definitionen bezogen die folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned}
24f_1H_1A_0 &= -\mu\, H_1(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}) - 2\nu T_1\lambda_1\lambda_2 \\
12f_1H_1A_1 &= \mu\, H_1\lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1} \qquad + \nu\, T_1\lambda_2^2 \\
12f_1H_1A_2 &= \mu\, H_1\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1} \qquad - \nu\, T_1\lambda_1^2 \\
2A_3 &= \mu \qquad .
\end{aligned}$$

S. 235, –6: Wie schon zu S. 214 angemerkt wurde, gilt $\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1' = 2\sqrt{A}$.

S. 236, 8: Es muß hier "... Funktion mit $\sqrt{A}$ ..." heißen.

S. 238, 2: Wie schon in den Anmerkungen zu S. 235 erwähnt wurde, sind diese Formeln zu korrigieren. Es gilt

$$2A_0 = -\sqrt{A} \cdot \frac{\left[\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}\right]}{12f_1} - 2P_1 \cdot \frac{\lambda_1\lambda_2}{12f_1}$$

und

$$A_2 = +\sqrt{A} \cdot \frac{\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}}{12f_1} - P_1 \cdot \frac{\lambda_1^2}{12f_1} .$$

S. 238, 14: Obwohl Klein die geometrische Deutung dem Leser überläßt, wollen wir hier doch kurz darauf eingehen, da sie die voraufgegangenen Passagen weiter erhellt. Dabei werden wir die Analogien zu unseren früheren Anmerkungen zu II 3 , insbesondere den Seiten 190 und 205, hervorheben.

Zunächst ersetzen wir das Formenproblem zu $\tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}/G$ durch das entsprechende projektive zu $S \longrightarrow S/G$. Die Reduktion dieses Problems erfolgt mittels einer G–äquivarianten, birationalen Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi' : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}^1 \\ ((\lambda_1:\lambda_2),(\lambda_1':\lambda_2')) &\longmapsto ((\lambda_1:\lambda_2),(m:n)) \ , \end{aligned}$$

die durch Projektivierung der Abbildung α (Anmerkungen zu S. 235) entsteht und explizit durch

$$\begin{aligned} m &= m_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\lambda_1',\lambda_2') = T(\lambda_1,\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1') \\ n &= n_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\lambda_1',\lambda_2') = H(\lambda_1,\lambda_2)\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\lambda_1' + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}\lambda_2'\right] \end{aligned}$$

gegeben wird (man beachte daß m und n bihomogene, $\hat{G}$–invariante Formen des gleichen Grades (31,1) sind; in Kleins Notation (Formel (50) und § 12) gilt $m = 2T_1\sqrt{A}$, $n = H_1P_1$). Eine birationale, G–äquivariante Umkehrung zu Φ' erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \\ ((\lambda_1:\lambda_2),(m:n)) &\longmapsto ((\lambda_1:\lambda_2),\varphi_{(\lambda_1:\lambda_2)}(m:n)) \ , \end{aligned}$$

wobei die rationale Abbildung

$$\varphi_{(\lambda_1:\lambda_2)} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

durch die lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}_{(\lambda_1,\lambda_2)} : \mathbb{A}^2 \longrightarrow V$$
$$(m,n) \longmapsto \left[-\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} H(\lambda_1,\lambda_2)m+\lambda_1 T(\lambda_1,\lambda_2)n, \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} H(\lambda_1,\lambda_2)m+\lambda_2 T(\lambda_1,\lambda_2)n\right)$$

induziert wird (hier benutzen wir die Klein'schen Koordinaten λ_1', λ_2' auf V). Diese Definition von $\varphi_{(\lambda_1:\lambda_2)}$ is die projektive Version von Kleins Formel (58).

Ähnlich wie in unseren Anmerkungen zu S. 190 lassen sich die Unbestimmtheitsstellen und singulären Punkte von Φ und Φ' bestimmen (unsere Notation ist mit Absicht an diese früheren Anmerkungen angepaßt). Auch läßt sich Φ wieder als einparametrige Schar von G–äquivarianten Abbildungen

$$\psi_{(m:n)} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V) \ ,$$
$$\Phi((\lambda_1:\lambda_2),(m:n)) = ((\lambda_1:\lambda_2),\psi_{(m:n)}(\lambda_1:\lambda_2))$$

auffassen (vgl. die Anmerkung zu S. 205). Die Abbildung $\psi_{(m:n)}$ wird durch die $\hat{G}$–Kovariante

$$\tilde{\psi}_{(m,n)} : V \longrightarrow V \ ,$$
$$\tilde{\psi}_{(m,n)} = mH\, \Psi_{11} + n\, T\, \Psi_1$$

induziert, wobei $\Psi_1, \Psi_{11} : V \longrightarrow V$ die fundamentalen $\hat{G}$–Kovarianten

$$\Psi_1(\lambda_1,\lambda_2) = (\lambda_1,\lambda_2)$$
$$\Psi_{11}(\lambda_1,\lambda_2) = \left[-\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\right]$$

vom Grade 1 und 11 sind, mittels derer sich jede rationale $\hat{G}$–Kovariante "typisch" darstellen läßt.

Kapitel II 5:

S. 239, 10: Die Aufgabe ist also die Konstruktion einer G–äquivarianten Abbildung $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{P}(V)$, die über einem fixierten Grundkörper $k \supset \mathbb{Q}(\epsilon)$ definiert ist. Hierbei bezeichnet W den Raum $\{(x_0,...,x_4) \in A^5 \mid \Sigma x_i = 0\}$, der die Darstellung (4′) realisiert, und V den Raum zur Darstellung (2) der binären Gruppe $\hat{G}$ (vgl. die früheren Anmerkungen, insbesondere zu S. 189). Klein wird im folgenden (§ 9) zeigen, daß φ nicht rational (sondern nur rational in algebraischen Funktionen) gewählt werden kann.

S. 243, –9: Hier ist natürlich "$\Sigma r \neq 0$" gemeint.

S. 246, –5: Diese Formel ergibt sich natürlich auch direkt aus (13) und den Definitionen von II 2 § 8 (ohne den Umweg über (14)). Für Klein liegt die Bedeutung der Formel (14) darin daß sie eine G–äquivariante, reguläre Abbildung $W \longrightarrow \Lambda^2 W$ vermittelt. Die Formeln (14) + (16) bzw. (14) + (18) + (19) beschreiben die gleiche Abbildung dann bezüglich anderer Koordinaten auf $\Lambda^2 W$.

S. 248, 6: Mit anderen Worten zerfällt die Darstellung von G auf $\Lambda^2 W$ in die direkte Summe

$$\Lambda^2(4') = (3) \oplus (3') .$$

Dies erfordert $\sqrt{5}$ im Grundkörper k . Als S_5–Modul ist $\Lambda^2 W$ irreduzibel.

S. 248, –9: D.h. bei der zweiten Lösungsmethode faktorisieren wir φ in G–äquivarianter Weise

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathbb{P}^1(V) \\ & S^2(V) \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

wobei ψ durch die Formeln (14) + (18) und ρ durch die Entwicklungen in II 4 (vgl. unsere explizite Definition von ρ in den Anmerkungen zu S. 235) gegeben wird. Man beachte daß ρ , und somit φ , nicht rational ist (in unserer Definition ist ρ auf der Überlagerung $\tilde{S}$ von $S^2(V)$ definiert).

S. 252, 6: Vgl. unsere Anmerkung zu Formel (16), S. 246.

S. 252, –15: Die ungestrichenen und gestrichenen Koordinaten sind hier zu vertauschen (vgl. auch die Formeln (41)–(44) auf S. 181, II 2 § 10).

S. 254, –11: Bei diesem Ansatz handelt es sich um die Konstruktion von G–Kovarianten $\varphi : W \longrightarrow V$ zwischen linearen Darstellungen einer endlichen Gruppe G durch Mittelung

$$\varphi := \sum_{g \in G} g \circ \psi \circ g^{-1}$$

einer gegebenen (homogenen) polynomialen Abbildung $\psi : W \longrightarrow V$. Dabei hat man sinnvollerweise W als treu und V als irreduzibel über einem Grundkörper k mit der $\mathrm{char}(k) = 0$ anzunehmen (im Prinzip genügt $(\mathrm{char}(k), |G|) = 1$) . In seiner Arbeit $[1879_a]$ (vgl. die Fußnote *) auf S. 254) erörtert Klein neben zahlreichen Beispielen (z.B. Lagrange'sche Resolventen bei zyklischen, Jacobi'sche Gleichungen und das Problem der A bei Gleichungen fünften Grades) eine wenig explizite Bedingung für das Nichtverschwinden der Mittelung φ , deren Erfüllbarkeit erst später von H. Burkhardt [1893] nachgewiesen wurde.

Burkhardts Resultat geht verwandten Entwicklungen in der ab 1895 entstehenden Charakter– und Darstellungstheorie endlicher Gruppen voraus (Resultate von Molien und Burnside, vgl. Burnside [1911 Chap. XV, §§ 226, 227]). In heutiger Formulierung besagt es, daß jede irreduzible Darstellung (i.e. V^*) in einer geeigneten symmetrischen Potenz $S^n(W^*)$ von W^* enthalten ist. Einen Beweis $(\mathrm{char}(k) = 0)$ kann man etwa so führen:

Da G auf W treu operiert und k unendlich ist, gibt es eine freie Bahn $X \subset W$ von G auf W , i.e. $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(G)$. Die Einschränkung der regulären Funktionen von W auf X

$$k[W] \longrightarrow k[X]$$

liefert dann einen surjektiven G–Modulhomomorphismus von $k[W]$ auf die reguläre Darstellung $k[G] \cong k[X]$. Aufgrund der vollständigen Reduzibilität von G tritt daher die reguläre Darstellung in $k[W]$, jede irreduzible Darstellung also in einer geeigneten homogenen Komponente $S^n(W^*) \subset k[W]$ auf.

Auf die Bedeutung G–äquivarianter Abbildungen $\varphi : W \longrightarrow V$ für die Reduktion der zugehörigen Formenprobleme sind wir schon in den Anmerkungen zu S. 125 eingegangen.

S. 255, –11: Im Sprachgebrauch der heutigen Algebra benutzt hier Klein die Tatsache daß der Polynomring $k[x_0,\ldots,x_n]$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt. Auf der folgenden Seite 256 wird Klein zum Kontrast den Koordinatenring $k[\mathfrak{Q}] = k[x_0,\ldots,x_4]/(\Sigma x_\nu, \Sigma x_\nu^2) = k[X_1,\ldots,X_4]/(X_1X_4 + X_2X_3)$ der affinen Hauptfläche $\mathfrak{Q}$ betrachten, der diese Eigenschaft offensichtlich nicht mehr besitzt (vgl. auch Hartshorne [1977 II § 6, insbesondere Ex. 6.5]).

S. 257, 3: Gemeint ist, daß sich schon die A_i (und nicht bloß ihre Verhältnisse) gemäß den Formeln II 4, § 2, (4) transformieren.

S. 257, 6: Kleins Präsentation der beiden letzten Paragraphen ist nicht immer sehr klar. Zum Vergleich seien dem Leser die Darstellungen von Weber [1899 §§ 124–126] und Fricke [1926 I 6, §§ 11–13] empfohlen, auch wenn diese inhaltlich an einigen Stellen von Klein abweichen.

S. 257, 16: Hier ist gemeint, daß das "Bild" der Gleichung (3) im Sinne von II 2, § 2 eine Vereinigung zweier Kurven vom Geschlecht Null ist. Zur Präzisierung sollte man hier zudem annehmen, daß (33) eine Gleichung über einer rein transzendenten Erweiterung $k(Z)$ des "skalaren" Grundkörpers $k \supset \mathbb{Q}(\epsilon)$ ist, und daß beide Komponenten des "Bildes" von (33) k–rationale Punkte besitzen.

S. 257, –3: Die folgenden acht Zeilen sind unnötig verwirrend. Nach Voraussetzung ist eine Komponente des "Bildes" von (33) vom Geschlecht Null, daher birational zur projektiven Gerade $\mathbb{P}^1$ über k (man beachte, daß wir die Existenz eines k–rationalen Punktes auf jeder Komponente vorausgesetzt haben, vgl. Serre [1968 Chap. X, § 6], [1978]).
Die Heranziehung der Parametrisierung (34) und des Satzes von Lüroth sind nicht hier sondern erst bei der Argumentation auf S. 259 unten angebracht (dies entspricht auch der ursprünglichen Vorgehensweise Kleins in seiner Arbeit von 1877, [1877_c]).
Für die heute übliche Formulierung des Satzes von Lüroth vgl. Hartshorne [1977 Chap. IV 2.5.5].

S. 258, –2: Zur Präzisierung des Gemeinten vgl. unsere Anmerkung zu S. 157.

S. 259, 13: Vgl. unsere Anmerkung zu S. 142, Zeile 12.

S. 259, –7: Kleins voraufgehende Argumentation legt es nahe als "skalaren" Grundkörper $k = \mathbb{C}$ zu wählen (wie es Weber [1899 § 123] und Fricke [1926 I 6, § 12] tun). Kleins Schlüsse lassen sich jedoch auch im Rahmen der algebraischen Geometrie über einem beliebigen Grundkörper k rechtfertigen (in unserer Situation wird man allerdings an der Grundvoraussetzung $k \supset \mathbb{Q}(\epsilon)$, oder oft auch $k \supset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, festhalten).

S. 259, –4: An dieser Stelle benötigen wir nun Lüroths Satz. In heutiger Terminologie beweist Klein den folgenden Sachverhalt: Sei $\xi : \mathbb{A}_k^5 \longrightarrow C$ eine rationale, dominante, über k definierte Abbildung des affinen Raumes $\mathbb{A}_k^5$ auf eine über k–definierte Kurve C . Dann ist C k–birational zur projektiven Geraden $\mathbb{P}_k^1$ über k.
Da die k–rationalen Punkte von $\mathbb{A}_k^5$ Zariski–dicht liegen $(k \supset \mathbb{Q})$, muß auch C einen k–rationalen Punkt besitzen. Somit genügt es über dem algebraischen Abschluß $\bar{k}$ von k zu argumentieren. Klein wählt nun eine rationale Kurve $D \subset \mathbb{A}_k^5$, die nicht konstant, also dominant, auf C abgebildet wird. Wir haben dann eine Inklusion der Funktionenkörper

$$\bar{k}(\lambda) = \bar{k}(D) \supset \bar{k}(C) \ .$$

Aus dem Satz von Lüroth ergibt sich nun daß $\bar{k}(C)$ rein transzendent vom Grad 1, d.h. C rational ist.

S. 260, 12: Kleins Beweis des Satzes von Kronecker ist von Gordan abgeändert worden und hat in dieser Abänderung eine Darstellung bei Weber [1899] und Fricke [1926] gefunden. Aus dem Blickwinkel der heutigen Interpretation der Klein'schen Theorie durch Brauer [1934] und Serre [1978] bietet Kleins Darstellung den Vorteil, daß sie das Auftreten der akzessorischen Quadratwurzel explizit an der Unmöglichkeit festmacht, die Ikosaedergruppe $G \subset PGL_2(k)$ zu einer isomorphen linearen Gruppe in $GL_2(k)$ zu liften. Dem entspricht die Nichttrivialität der Erweiterung

$$1 \longrightarrow \langle \pm 1 \rangle \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 \ ,$$

oder das nichttriviale Element in $H^2(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, vgl. die Anmerkung zu S. 46. In der Theorie von Brauer und Serre liefert dieses Element schließlich eine Quaternionenalgebra, deren Zerfallen oder Nichtzerfallen über die Notwendigkeit der akzessorischen Quadratwurzel entscheidet (bei beliebigen Galoiserweiterungen $k \subset K$ mit $\mathrm{Gal}(K,k) = G$).

WEITERE ENTWICKLUNGEN

Klein verfaßte sein "Ikosaederbuch" nachdem er seine wichtigsten Entdeckungen in der Gleichungstheorie (1875 – 1879), der Theorie der elliptischen Modulfunktionen (1878 – 1881) und der Theorie der automorphen Funktionen (1881 – 1882) bereits gemacht hatte. Von den Resultaten her bezieht sich sein Buch im wesentlichen auf die Arbeit [1877_c], und abgesehen von gelegentlichen Anmerkungen sowie den allgemeineren Ausführungen in Kapitel I 5, ging Klein nicht inhaltlich auf Resultate ein, die die "Ikosaedertheorie" fortführten. Dies lag teilweise an der Unabgeschlossenheit seines allgemeinen Ansatzes in [1879_a] aber auch an der Verflechtung jener Resultate mit der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, der Klein weitere Buchprojekte (nämlich die später erschienenen Bände Klein–Fricke [1890], [1892]) zugedacht hatte.

Wir wollen hier kurz über einige der Fortentwicklungen der Ikosaedertheorie bis in unsere heutige Zeit berichten. Wertvolle Berichte dazu findet der Leser auch bei Wiman [1900], Fricke [1926, Zweiter Abschnitt, Kap. 4, §§ 7–9] und Brauer [1979].

1. Formenprobleme

"Formenprobleme" werden von Klein bereits im "Ikosaederbuch" (I5, §§4, 5) angeschnitten und sind auch von uns technisch kommentiert worden (vgl. die Anmerkungen zu den Seiten 125 und 254). Wir wiederholen jedoch noch einmal einige grundlegende Definitionen.

Jeder endlichdimensionalen, linearen Darstellung $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ einer endlichen Gruppe G über einem Grundkörper k ist ein Formenproblem (G, V) zugeordnet, das – heuristisch gesprochen – in der Umkehr des Quotienten

$$V \longrightarrow V/G$$

besteht. Etwas präziser kann man es folgendermaßen formulieren (dabei fassen wir V und V/G als affine Schemata zu den k–Algebren $k[V]$ bzw. $k[V]^G$ auf):

Sei L ein Erweiterungskörper von k (z. B. $L = k$ oder $L = k(V)^G$), $\bar{L}$ algebraischer Abschluß von L und $u \in (V/G)(L)$. Bestimme $x \in V(\bar{L})$ mit $q(x) = u$.

Da jede Faser $q^{-1}(u)$ aus einer Bahn unter G besteht, lassen sich aus einem Punkt $x \in q^{-1}(u)$ alle anderen durch L–rationale Operationen gewinnen. Bezeichnet L(x) die Körpererweiterung von L, die von den k–Koordinaten von x erzeugt wird, so gilt also

$$L(x) = L(y)$$

für alle $x, y, \in q^{-1}(u)$.

Neben die "Formenprobleme" stellt Klein die "Gleichungssysteme", die wir, wie in unseren Kommentaren, lieber "Projektive Formenprobleme" nennen. Letztere sind projektiven Darstellungen

$$\rho : G \longrightarrow PGL\,(V) = \mathrm{Aut}_k\,(\mathbb{P}(V))$$

zugeordnet und bestehen in dem Problem der "Umkehr" des Quotienten

$$q : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)/G$$

(welches sich analog zu den obigen Formenproblemen präzisieren läßt).

In seiner Arbeit [1879_a] hatte Klein bereits erkannt, daß seine "Ikosaedertheorie" ein Spezialfall einer Reduktion von Formenproblemen war, in diesem Fall nämlich eine Reduktion des Formenproblems $(A_5, \mathbb{A}_k^5)$, bei dem die alternierende Gruppe A_5 durch Permutation auf den Koordinaten des affinen Raumes $\mathbb{A}_k^5$ operiert, auf das projektive Formenproblem $(A_5, \mathbb{P}_k^1)$, wobei die Gruppe A_5 jetzt als Ikosaedergruppe auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}_k^1$ operiert. Gleichzeitig erkannte er, daß sich ein Formenproblem (G, W) auf ein Formenproblem (G, V) reduzieren läßt, sofern eine nicht–triviale G–äquivariante (polynomiale) Abbildung

$$\varphi : W \longrightarrow V$$

zur Verfügung steht (für eine technische Präzisierung vgl. unsere Anmerkungen zu S. 125).

Zur Konstruktion einer solchen Kovariante φ schlug Klein die Mitteilung einer beliebigen (polynomialen) Abbildung

$$\psi : W \longrightarrow V$$

vor:

$$\varphi = \sum_{g \in G} g \psi g^{-1} \quad .$$

Abgesehen von einigen Beispielen konnte er allerdings noch nicht zeigen, daß φ bei geeigneter Wahl von ψ nicht–trivial wird. Dies wurde erst später von H. Burckhardt [1893] gezeigt (vgl. unsere Anmerkung zu S. 254).

In Anbetracht dieser Entwicklungen ergaben sich für Klein die folgenden Fragestellungen, die er mehr oder weniger explizit formulierte (vgl. [1879_a], Ikosaederbuch I 5 §5, [1894 Lect. IX]):

1) Zu einer gegebenen endlichen Gruppe G finde man die linearen treuen Darstellungen

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

kleinsten Grades $\dim V$. (In unserem heutigen Verständnis dachte Klein dabei an den Grundkörper k als dem Körper der komplexen Zahlen oder dem Definitionskörper $\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{C}$.)

2) Zu einer gegebenen endlichen Gruppe G finde man die projektiven treuen Darstellungen

$$\rho : G \longrightarrow PGL(V)$$

kleinster Dimension, $\dim \mathbb{P}(V)$.

(Bezüglich des Grundkörpers k vgl. 1)).

Aus der Sicht der Anwendungen stellten sich die obigen Probleme zunächst für einfache Gruppen. Für diejenigen kleinster Ordnung waren Klein 1894 die folgenden Resultate bekannt (vgl. Klein [1879_a], [1879_b], [1886]):

Gruppe	Ordnung	min. Dim. 1)	min. Dim. 2)
$A_5 \cong PSL_2(\mathbb{F}_5)$	60	3	1
$PSL_2(\mathbb{F}_7)$	168	3	2
A_6	360		≤ 4
$PSL_2(\mathbb{F}_{11})$	660	≤ 5	≤ 4
A_7	2520		≤ 4

Für jede alternierende Gruppe A_n erhält man eine lineare Darstellung

$$A_n \longrightarrow GL(A_k^{n-1})$$

durch Einschränkung der n–dimensionalen Permutationsdarstellung auf die Hyperebene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \; .$$

Zudem induziert diese Darstellung eine projektive Darstellung

$$A_n \longrightarrow PGL_{n-2}(k) \; .$$

Klein war im Falle $n = 8$ keine projektive Darstellung von A_8 kleinerer Dimension bekannt. In seinem Bericht [1894] stellte er diese Gruppe daher besonders heraus. Tatsächlich wurde dann später von Wiman gezeigt daß A_n für $n \geq 8$ keine projektive Darstellung der Dimension kleiner $n-2$ besitzt (Wiman [1899]).

Im Rahmen der sich ab 1896 entwickelnden Darstellungs– und Charaktertheorie endlicher Gruppen (Frobenius, Burnside, Schur) sind die obigen Fragen erneut von I. Schur aufgenommen und zusammen mit anderen weitreichenden Resultaten bewiesen worden (vgl. Schur [1904], [1907], [1911]).

Ein Einfluß der Kleinschen Fragen auf die Beiträge von Molien und Maschke zur Darstellungstheorie wird von Hawkins [1972] nahegelegt.

Eine Abwandlung der Fragen 1) und 2) ist die folgende, die bereits in Kleins Arbeiten [1877_c], [1878_a], [1878_c] suggeriert wird, und auf die sich Hurwitz bei seinen Untersuchungen über die Automorphismen algebraischer Kurven bezieht([1888], [1893]):

3) Zu einer gegebenen endlichen Gruppe G finde man eine irreduzible algebraische Kurve X minimalen Geschlechts, auf der G treu operriert.

(Es ist einfach eine irreduzible Kurve mit treuer G–Aktion zu konstruuieren, vgl. Hurwitz, loc. cit. Von den Anwendungen liegt es nahe, zusätzlich zu verlangen, daß X/G rational ist.)

2. Gleichungen mit speziellen Galoisgruppen

Im Anschluß an seine Arbeiten über das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades (1875 – 1877) ging Klein zur Betrachtung höherer Gleichungen mit größeren Galoisgruppen über.

Am ausführlichsten untersuchte Klein die nach der Ikosaedergruppe nächstgrößere einfache Gruppe $$G_{168} \cong PSL_2(\mathbb{F}_7)$$

der Ordnung 168. In der Arbeit [1878_c] konstruierte er eine dreidimensionale Darstellung dieser Gruppe unter Benutzung elliptischer Modulfunktionen:

Sei C die vervollständigte Modulkurve der Stufe 7

$$C = \overline{H/\Gamma(7)}$$

(zu den Notationen vgl. unsere Einführung § 3).

Diese hat das Geschlecht 3. Die Gruppe $G_{168} \cong \Gamma/\Gamma(7)$ operiert auf C in natürlicher Weise, daher auch auf dem 3–dimensionalen komplexen Verktorraum.

$V = H^0(C, \Omega^1)$ der globalen holomorphen Differentialformen auf C.

Bezüglich einer geeigneten Basis von V wird das Bild von C unter der kanonischen

G_{168}–äquivarianten Einbettung

$$C \hookrightarrow \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V^*)$$

durch die quartische Kurve

$$\left\{ (x:y:z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^3y + y^3z + z^3x = o \right\}$$

repräsentiert.

Die Auflösung der Gleichungen 7. und 8. Grades mit Galoisgruppe G_{168} erfolgt nun in Analogie zur Ikosaedertheorie (Weg über das "Problem der A") (vgl. Klein [1879_a]): Zunächst konstruiert Klein eine G_{168}–äquivariante Abbildung

$$A_k^7 \longrightarrow \mathbb{P}_k^2 \text{ bzw. } A_k^8 \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$$

(k ist eine hinreichend kleine Erweiterung von $\mathbb{Q}$), die die Lösung der Gleichungen auf das (projektive) Formenproblem $(G_{168}, \mathbb{P}^2)$ reduziert. Nach Adjunktion einer akzessorischen Irrationalität vierten Grades läßt sich dieses Problem auf das Problem der Umkehr des Quotienten

$$q : C \longrightarrow C/G_{168}$$

reduzieren, in Analogie zur Reduktion des "Problems der A" auf die Ikosaedergleichung. Ist nämlich $x \in \mathbb{P}^2$, so schneidet die Polare von x bezüglich C die Kurve C in vier kovarianten Punkten. Trennung dieser Punkte erfordert die akzessorische Irrationalität. Die Umkehr des Quotienten $C \longrightarrow C/G_{168}$ läßt sich wie bei der Ikosaedergleichung mittels elliptischer Integrale und elliptischer Modulfunktionen bewerkstelligen.

Klein entwickelte diese Theorie nicht mehr so detailliert wie seine Ikosaedertheorie. Dies blieb einer Serie von invariantentheoretisch orientierten Arbeiten Gordans vorbehalten (Gordan [1880_a], [1880_b],[1882_a], [1882_b], [1882_c], [1885], vgl. auch Kleins Bericht [1922, GMA II, S. 426–438]). Darstellungen von Teilen der Theorie finden sich bei Weber [1899 §§ 131–147] und Fricke [1926, 2. Abschnitt, Kap. 1 und 2]. Für einige Aspekte vgl. auch Gray [1982], [1986].

In Fortsetzung der obigen Theorie beginnt Klein in [1879_b] die Untersuchung von Gleichungen 11. und 12. Grades mit einfacher Galoisgruppe $G_{660} \cong PSL_2(\mathbb{F}_{11})$. Hier hat die vervollständigte Modulkurve $C = \overline{H/\Gamma(11)}$ das Geschlecht 26. Mittels der 11–Teilungswerte von Thetafunktionen konstruiert Klein eine 5–dimensionale Darstellung $\rho : G_{660} \longrightarrow GL(V)$, auf deren Formenproblem (G_{660}, V) sich die Lösung der oben genannten Gleichungen reduziert. Die Modulkurve C bettet sich G_{660}–äquivariant in den zugehörigen $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(V)$ als Doppelkurve der Hesseschen einer G_{660}–äquivarianten Kubik ein. Eine Reduktion des Formenproblems (G_{660}, V) auf die Umkehr des Quotienten $C \longrightarrow C/G_{660}$ wird von Klein jedoch nicht angegangen.

Die Konstruktion der 5–dimensionalen Darstellung wird später von Klein verallgemeinert zur Konstruktion von $SL_2(\mathbb{F}_p)$–Darstellungen der Dimension $\frac{p-1}{2}$ (Klein [1885], s. a. Hurwitz [1886]). Dabei entstehen ebenfalls Darstellungen der Dimension $\frac{p+1}{2}$. Aus heutiger Sicht vermittelt Kleins geometrische Konstruktion projektive Modelle für Shiodas elliptische Modulflächen (vgl. z. B. Barth–Hulek [1985], Bartsch [1985]).

Allgemeine Gleichungen 6. und 7. Grades mit Galoisgruppe A_6 bzw. A_7 wurden von Klein in [1886] in Analogie zur Theorie der Hauptgleichungen bei Gleichungen fünften Grades studiert. Ihre Lösung wurde dabei auf 4–dimensionale Formenprobleme reduziert. Im Fall der Gruppe A_6 ergab sich jedoch später eine Vereinfachung durch Entdeckung einer projektiven Darstellung

$$A_6 \rightarrow PGL_3(\mathbb{C})$$

(Valentiner–Wiman, vgl. Wiman [1896]).

In Anbetracht dieser Situation skizzierte Klein eine Reduktionsmethode für die Gleichungen sechsten Grades auf das entsprechende projektive Formenproblem $(A_6, \mathbb{P}^2)$ (vgl. Klein [1905_a]). Diese Skizze wurde von Lachtin [1899], Gordan [1904], [1905], [1908], [1910] und Coble [1911_b] aufgenommen und schließlich von Fricke [1926, 2. Abschnitt, Kap. 3, 4] soweit ausgebaut, daß sich eine weitestgehende Analogie zur "Ikosaedertheorie" und zur

Theorie der Gleichungen 7. Grades mit Galoisgruppe G_{168} herausbildete. (Für die transzendente Lösung benutzte Fricke jetzt nicht–elliptische automorphe Funktionen, die allerdings auch bei dem projektiven Formenproblem $(G_{168}, \mathbb{P}^2)$ eingesetzt werden konnten.)

An weiteren Untersuchungen über Gleichungen und Formenprobleme, die sich zumeist von geometrisch ausgezeichneten Konfigurationen ableiten und weniger von Klein als von seinen Schülern bearbeitet wurden, seien die folgenden genannt:

1) Die Gleichung der 27 Geraden auf einer kubischen Fläche. Hier tritt als Galoisgruppe die Weylgruppe $W(E_6)$ des Wurzelsystems vom Typ E_6 auf, die eine einfache Gruppe $G_{25920} \cong PSp_4(\mathbb{F}_3)$ als Untergruppe vom Index 2 enthält. Mittels hyperelliptischeer Modulfunktionen des Geschlechtes 2 und der Stufe 3 konstruiert Klein eine 4–dimensionale Darstellung der Gruppe $Sp_4(\mathbb{F}_3)$. Die obige Gleichung 27. Grades läßt sich dann auf das zugehörige projektive Formenproblem $(PSp_4(\mathbb{F}_3), \mathbb{P}^3)$ reduzieren (Klein [1888]). Detaillierte Ausführungen und Weiterentwicklungen wurden von Witting, Maschke und Burkhardt geliefert (vgl. Maschke [1889], Burkhardt [1890–93], Coble [1917]).

2) Auch die Weylgruppe $W(D_6)$ tritt in natürlicher Weise bei den hyperelliptischen Modulfunktionen des Geschlechtes 2, aber diesmal der Stufe 2 auf. Über diesbezügliche Untersuchungen und die Beziehung zu den Gleichungen 6. Grades vgl. Wiman [1900 § 22].

3) Hinweise zur Untersuchung der einfachen Gruppe $G_{504} \cong PSL_2(\mathbb{F}_8)$ findet man bei Fricke [1926, 2. Abschnitt, Kap. 4, § 9].

4) Schließlich sei auf die Untersuchung birationaler Transformationsgruppen hingewiesen (Kantor [1895], Wiman [1897], Wiman [1900 § 25]). Eine Verallgemeinerung des Formenproblems für solche Gruppen wurde von Coble betrachtet und für die Reduktion von Gleichungen benutzt (vgl. Coble [1911_a], [1915], [1916]).

3. "Moderne" Entwicklungen

Entsprechend der ständig anwachsenden Bedeutung der abstrakten Algebra zu Anfang dieses Jahrhunderts tritt zu dieser Zeit die Betrachtung expliziter Gleichungen in den Hintergrund zugunsten der durch diese Gleichungen definierten Körpererweiterungen (eine Tendenz, die bereits deutlich in den Werken von Galois angelegt war, aber erst in einem langen Prozeß von Dedekind, Kronecker, Weber, Hilbert, Steinitz entfaltet wurde). In der Darstellungstheorie endlicher Gruppen (Frobenius, Burnside, Schur) und der damit eng verbundenen Strukturtheorie einfacher Algebren ("hyperkomplexe Systeme", Molien, Noether, Hasse, Brauer, Deuring) wuchsen zudem neue Begriffe und Methoden heran, die ebenfalls zu einer Transformation der Kleinschen Theorie beitrugen.

Einen ersten Schritt in diesem Umwandlungsprozeß vollzieht Speiser in seiner Arbeit [1916 §§ 1–4]. Seinen Ansatz können wir folgendermaßen umreißen: Sei K eine endliche Galoiserweiterung von k mit Galoisgruppe G und $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine über k definierte lineare Darstellung. Eine "verallgemeinerte Lagrangesche Resolvente" oder, wie wir lieber sagen, eine ρ–Solvente von K über k ist dann ein Element $x \in V(K)$, das sich unter der Aktion der Galoisgruppe gemäß der Darstellung ρ transformiert

$$^{\sigma}x = \rho(\sigma)^{-1}x \qquad (\sigma \in G)\,.$$

(Hier bezeichne $^{\sigma}x$ die Aktion von σ als Element der Galoisgruppe und $\rho(\sigma)x$ die Anwendung der linearen Transformation $\rho(\sigma)$.) Ist $q\colon V \longrightarrow V/G$ die über k definierte Quotientenabbildung, so gilt

$$^{\sigma}q(x) = q(^{\sigma}x) = q(\rho(\sigma)^{-1}x) = q(x)\,.$$

Also ist x eine Lösung der "ρ–Resolvente"

$$q(X) = u$$

(mit $u = q(x)$), d. h. x ist eine (spezielle) Lösung des Formenproblems (G,V). Der Körper K wird von x, d. h. von den Koordinaten von x bezüglich einer k–Basis von V, über k erzeugt, sofern x primitiv ist, d. h. $^{\sigma}x \neq x$ für alle $\sigma \in G \setminus \{1\}$ gilt.

Ausgehend von geeigneten Elementen $\omega \in K$ konstruiert Speiser ρ–Solventen $x(\omega)$ für alle irreduziblen, über k definierten Darstellungen ρ von G. Beim Beweis der Nichttrivialität dieser Solventen benutzt er neben elementaren Resultaten aus der Darstellungstheorie die Existenz einer Normalbasis von K über k, ein Sachverhalt, der schon Dedekind (vgl. den Brief an Frobenius vom 8.7.1896, [GMW II, S. 433]) bekannt war, der aber erst später einen publizierten Beweis erhielt (vgl. E. Noether [1932_a], wo eine lückenhafte Skizze gegeben wurde, sowie Deuring [1933], der methodisch anders vorging; eine korrekte Durchführung des von E. Noether benutzten Spezialisierungsargumentes findet man z. B. in Lang [1967], Modifikationen bei Artin [1968] und van der Waerden [1966]).

Speiser rekonstruiert auch eine Normalbasis von K aus einer vollständigen Familie von ρ–Solventen (wobei ρ die irreduziblen k–Darstellungen durchläuft). Wie er in § 4 zeigt, benötigt er jedoch nur eine ρ–Solvente zu einer treuen Darstellung ρ. Dazu leitet er erneut ein Resultat von Burnside über die Tensordarstellungen einer gegebenen treuen Darstellung her, auf das wir in unseren Anmerkungen zu S. 254 bereits eingegangen sind.

Obwohl sich Speiser explizit auf das "Ikosaederbuch" bezieht, scheint er keine Kenntnis von Kleins allgemeinem Ansatz [1879_a] gehabt zu haben, der seine Konstruktion der ρ–Solventen bereits in der allgemeinen Konstruktion G–äquivarianter Abbildungen durch Mittelung vorweggenommen hatte (vgl. insbesondere [1879_a] § 4 für die Rechnung von Speisers Beispiel in [1916 § 2], sowie § 12 für die vereinfachten Verhältnisse bei Galoissolventen). Am präzisesten läßt sich die Unterordnung des Begriffes der "ρ–Solvente" unter den der "G–Kovariante" oder "G–äquivarianten Abbildung" in der Sprache der heutigen algebraischen Geometrie verstehen. Fassen wir Spec K als einen Raum mit G–Aktion auf, so ist eine ρ–Solvente $x \in V(K)$ nichts anderes als ein G–äquivarianter Morphismus

$$\mathrm{Spec}\,(K) \longrightarrow V$$

von G–Schemata (vgl. auch unsere Anmerkungen zu S. 125).

Obwohl nicht durch explizite Verweise belegbar, mag Speisers Arbeit [1916] einen Einfluß gehabt haben auf seine und Schurs spätere Beiträge zur heute so genannten Galoiskohomologie der allgemeinen und projektiven linearen Gruppen ($H^1(\mathrm{Gal}(K,k),\ GL_n(K)) = 1$, Speiser [1919], $H^1(\mathrm{Gal}(K,k),\ PGL_n(K)) = H^2(G,\ K^*)$ falls $n = [K:k]$, Schur [1919], vgl. auch Serre [1968, Chap.X, §§ 1,5]). Eine begrifflich einfachere Konstruktion der ρ–Solventen mittels des Normalbasissatzes und der daraus resultierenden G–Modulisomorphie $K \cong k[G]$ gibt E. Noether in [1932_a].

Während die Artikel von Speiser [1916] und Noether [1932_a] keine neuen inhaltlichen Beiträge zur Kleinschen Theorie beisteuern, erreicht R. Brauer in seiner Arbeit [1934] eine umfassende Einsicht in die Kernfragen der Theorie, die man auch heute noch als abschließend betrachten kann.

Zu Anfang seiner Arbeit [1934] präzisiert Brauer einige grundlegende Definitionen und Aussagen über Formenprobleme und die Reduktion von Gleichungen auf solche (§ 1). In Anlehnung an Noether [1932_a] gibt er auch einen erneuten Beweis für die Reduzierbarkeit einer Gleichung mit Galoisgruppe G ($G = \mathrm{Gal}(K, k)$, wobei k der Grundkörper und K der Zerfällungskörper der Gleichung über k ist) auf ein Formenproblem (G, V) zu einer treuen, über k definierten, linearen Darstellung $G \longrightarrow GL(V)$ (§ 2). Im Hauptteil der Arbeit (§§ 3, 4) untersucht er dann die Bedingungen, unter denen eine Reduktion auf ein projektives Formenproblem $(G, \mathbb{P}^n_k)$ zu einer treuen projektiven Darstellung

$$\rho : G \longrightarrow PGL_{n+1}(k) = \mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^n_k)$$

möglich ist, d. h. unter denen es eine primitive ρ–Solvente $x \in \mathbb{P}^n_k(K)$ gibt:

$$^{\sigma}x = \rho(\sigma^{-1})\, x \quad \text{für alle } \sigma \in G = \mathrm{Gal}(K, k),$$
$$^{\sigma}x \neq x \quad \text{für alle } \sigma \in G \setminus \{1\}\,.$$

Wie ja schon Klein im "Ikosaederbuch" gezeigt hatte, war diese Reduktion im allgemeinen erst nach Ersetzung des Grundkörpers k durch eine akzessorische Erweiterung durchführbar. Das diesbezügliche Hindernis wird nun von Brauer als die Klasse eines durch die projektive Darstellung ρ gegebenen Faktorensystems

$$\delta : G \times G \longrightarrow K^*$$

bzw. als die "Brauerklasse" der entsprechenden zentral–einfachen k–Algebra A_ρ identifiziert. Ist $\tilde{\rho} : G \longrightarrow GL_{n+1}(k)$ eine mengentheoretische Liftung von ρ, so erhält man ein Faktorensystem δ durch die Definition

$$\delta(\sigma,\tau) = \tilde{\rho}(\sigma)\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(\sigma\tau)^{-1} \qquad (\sigma,\tau \in G) ,$$

und die Algebra A_δ ist das mittels δ konstruierte "verschränkte Produkt" von K und G (zur Terminologie vgl. Noether [1932a], van der Waerden [1967]).

Die Konstruktion der Körpererweiterung K von k läßt sich genau dann auf das projektive Formenproblem $(G, \mathbb{P}^n_k)$ reduzieren, wenn die Klasse von δ bzw. A_δ trivial ist, d. h. wenn die Algebra A_δ isomorph zu $M_{n+1}(k)$ ist ("A_δ zerfällt"). Mit den in der Algebrentheorie erhaltenen Einsichten über die Zerfällungskörper zentral einfacher Algebren erhält man nun wertvolle Informationen über die Natur der akzessorischen Irrationalitäten, die für den Reduktionsprozeß erforderlich sind (vgl. Brauers Beispiele [1934 §4. 13], [1979 §17]). Brauer zeigt (§5) im Anschluß an Kleins Beweis von Kroneckers Satz ("Ikosaederbuch" II 5, §§9, 10, 11), daß sich "allgemeine" Formenprobleme, insbesondere die Lösung "allgemeiner" Gleichungen, mit Galoisgruppe G genau dann auf ein projektives Formenproblem $(G, \mathbb{P}^n_k)$ reduzieren lassen, wenn sich die projektive Darstellung von G auf $\mathbb{P}^n_k$ zu einer linearen Darstellung von G auf $\mathbb{A}^{n+1}_k$ liften läßt. In der Sprache der Gruppenerweiterungen bedeutet dies, daß die von der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow k^* \longrightarrow GL_{n+1}(k) \longrightarrow PGL_{n+1}(k) \longrightarrow 1$$

induzierte zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow k^* \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

trivial ist. Gleichbedeutend damit ist die Trivialität der durch diese Erweiterung definierten Gruppenkohomologieklasse in $H^2(G,k^*)$. (Falls G perfekt, also z. B. einfach ist, so gilt das gleiche für die von der Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_{n+1}(k) \longrightarrow SL_{n+1}(k) \longrightarrow PGL_{n+1}(k)$$

induzierte Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mu_{n+1}(k) \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 ,$$

der ein Element in $H^2(G,\mu_{n+1}(k))$ entspricht.)

Brauers Beweise seines Hauptresultates (§3 und §4) sind elementar, sie gewinnen aber an Durchsichtigkeit, wenn man wie Serre [1978] die Benutzung des Faktorensystem δ umgeht und zudem die einer zentral–einfachen Algebra A, $\dim_k A = d^2$, zugeordnete Brauer–Severi–Varietät X aller d–dimensionalen Linksideale von A betrachtet. Eine zu A_δ Brauer–äquivalente Algebra A_ρ erhält man nämlich als Fixpunktunteralgebra

$$A_\rho = \{X \in M_{n+1}(K) \mid {}^\sigma X = \tilde{\rho}(\sigma)^{-1} X \tilde{\rho}(\sigma) = \mathrm{Int}(\rho(\sigma)^{-1})(X) \text{ für alle } \sigma \in G \} .$$

Ähnlich entsteht die zugehörige Brauer–Severi–Varietät X_ρ durch Galoisabstieg aus der Brauer–Severi–Varietät $\mathbb{P}^n_K$ von $M_{n+1}(K)$. Insbesondere gilt für die k–rationalen Punkte

$$X_\rho(k) = \{x \in \mathbb{P}^n_k(K) \mid {}^\sigma x = \rho(\sigma^{-1})x \text{ für alle } \sigma \in G \} .$$

(Aus galoiskohomologischer Sicht liegt dem die Injektivität der Korandabbildung

$$\Delta : H^1(\mathrm{Gal}(K,k),PGL_{n+1}(K)) \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(K,k),K^*)$$

zugrunde, die die Klasse $[\rho]$ des als 1–Kozyklus aufgefaßten Homomorphismus $\rho : G \longrightarrow PGL_{n+1}(k)$ in die Klasse $[\delta]$ des Faktorensystems δ überführt. Die Gruppe $H^2(\mathrm{Gal}(K,k),K^*)$ identifiziert sich mit der relativen Brauergruppe $\mathrm{Br}(K,k)$

$$\begin{aligned} H^2(\mathrm{Gal}(K,k),K^*) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(K,k) \\ [\rho] &\longmapsto [A_\rho] \ , \end{aligned}$$

und $H^1(\mathrm{Gal}(K,k),\mathrm{PGL}_{n+1}(K))$ läßt sich als Menge der k–Isomorphieklassen der k–Formen von $M_{n+1}(K)$ als auch der von $\mathbb{P}^n_K$ auffassen. Für diesbezügliche Details vgl. Serre [1968 Chap. X].)

Es gilt nun die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen

i) Die Algebra A_ρ zerfällt, d. h. $A_\rho \cong M_{n+1}(k)$.

ii) Die Varietät X_ρ zerfällt, d. h. $X_\rho \cong \mathbb{P}^n_k$.

iii) Die Varietät X_ρ besitzt einen k–rationalen Punkt, d. h. $X_\rho(k) \neq \emptyset$.

Nach Konstruktion sind die k–rationalen Punkte von X_ρ aber nichts anderes als unsere früheren ρ–Solventen. Ist der Grundkörper k unendlich, was wir ohne große Beeinträchtigung annehmen dürfen, so existieren mit ρ–Solventen auch immer primitive ρ–Solventen, d. h. Punkte $x \in X_\rho(k)$ mit ${}^\sigma x \neq x$ für alle $\sigma \in G \setminus \{1\}$. Daher erhalten wir unmittelbar die Äquivalenz der obigen vier Aussagen zu der folgenden:

iv) Die Konstruktion der Körpererweiterung $K \supset k$ ist auf das projektive Formenproblem $(G, \mathbb{P}^n_k)$ reduzierbar.

(Natürlich läßt sich auch die Reduzierbarkeit auf ein gewöhnliches Formenproblem $(G,\mathbb{A}^n_k)$ zu einer Darstellung $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ galoiskohomologisch interpretieren. In diesem Fall besagt Speisers Resultat, $H^1(\mathrm{Gal}(K,k), \mathrm{GL}_n(K)) = 1$ (Speiser [1919], Serre [1968 Chap. X § 1]), daß alle k–Formen von $\mathbb{A}^n_K$ k–isomorph zu $\mathbb{A}^n_k$ sind. Insbesondere gilt für den mit ρ "getwisteten" Raum $(\mathbb{A}^n_k)_\rho$

$$(\mathbb{A}^n_k)_\rho(k) = \{x \in \mathbb{A}^n_k(K) \mid {}^\sigma x = \rho(\sigma^{-1})x \text{ für alle } \sigma \in G\} \cong k^n ,$$

d.h. es gibt genügend ρ–Solventen von K über k, insbesondere primitive, wenn k unendlich ist.)

Serres Brief ([1978]) konzentriert sich auf Galoiserweiterungen $k \subset K$, deren Gruppe G die Ikosaedergruppe ist (der Brief wurde ohne Kenntnis der Arbeit von Brauer [1934] verfaßt). In dieser speziellen Situation läßt sich den obigen vier Bedingungen eine weitere hinzufügen, die die Witt–Invariante der quadratischen Form

$$x \mapsto \mathrm{Tr}(x^2),\ x \in k'$$

auf einer Zwischenerweiterung $k \subset k' \subset K$ fünften Grades involviert und Kleins Verwendung von "Hauptgleichungen" beleuchtet. In der Arbeit [1984] hat Serre die Untersuchung dieser Form bei allgemeinen Körpererweiterungen wiederaufgenommen und die Berechnung der Witt–Invarianten weitergeführt.

4. Andere Theorien

Abweichend von den zentralen Fragestellungen der Kleinschen Theorie haben sich andere Untersuchungen mit verwandten Aspekten der Gleichungstheorie beschäftigt. Im Zusammenhang mit dem von ihm gestellten 13. Problem (Hilbert [1900]) untersuchte Hilbert in [1927] die Frage, inwieweit sich die Wurzelfunktionen einer allgemeinen algebraischen Gleichung aus Funktionen möglichst weniger Argumente zusammensetzen lassen (Komposition und rationale Kombination). Eine Tschirnhaustransformation (wie bei Bring) reduziert die Zahl der nötigen Argumente unmittelbar auf $n-4$, wobei $n \geq 5$ der Grad der vorliegenden Gleichung ist. Für die Gleichung neunten Grades zeigte Hilbert jedoch, daß Funktionen von vier Argumenten genügen. Die Fragestellung wurde aufgenommen von Wiman, Tschebotarew, Segré und Brauer (vgl. van der Waerdens Kommentar in Hilberts gesammelten Abhandlungen II, S.401–403, und Brauer [1975]).

Bei den obigen Arbeiten treten die galoistheoretischen Gesichtspunkte in den Hintergrund. Dies gilt auch für die sich an Jordan [1870] und Lindemann [1884], [1892] anschließenden Untersuchungen zur Auflösung algebraischer Gleichungen mittels hyperelliptischer Modulfunktionen (Coble [1924], Umemura [1984]). Für eine Einführung in diese Thematik verweisen wir den Leser auf den Beitrag von O. Neumann zu dieser Ausgabe.

Die folgende Liste von Referenzen zu Themen, die den Gegenstand des "Ikosaederbuchs" berühren, reflektiert sowohl die Vorlieben des Herausgebers als auch die Zufälligkeiten einer wenig systematischen Sammlung und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

A

Abel, N.H. [1824]
Mémoire sur les équations algébriques ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'equation générale du cinquième degré
Gröndahl, Christiania, 1824
Oeuvres complètes de Niels Hendrik Abel t. I, 28-33
Ed. L. Sylow, S. Lie, 2 Vol., C. Gröndahl+ Sons, Christiania, 1881

Abel, N.H. [1826]
Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré
Crelle Bd. 1, 1826, 65-89 (in Deutsch)
Oeuvres complètes de Niels Hendrik Abel t.I, 66-87
Ed. L. Sylow, S. Lie, 2 Vol., C. Gröndahl+ Sons, Christiania, 1881

Ahlfors, L.V. [1966]
Complex Analysis
McGraw-Hill, New-York, 1966

Arnol'd, V.I. [1972]
Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A(k), D(k), E(k) and Lagrangian singularities
Funct. Anal. 27(1972),254-272

Arnol'd, V.I. [1974]
Critical points of smooth functions
Proc. Int. Cong. Math. Vancouver, Vol. 1, 19-39 (1974)

Arnol'd, V.I. [1983a]
Singularities of Ray Systems
Proc. Intern. Congr. Math., Warszawa, 1983, 27-49

Arnol'd, V.I. [1983b]
Singularities of systems of rays
Russian Math. Surveys 38(1983), 87-176

Artin, E. [1968]
Galoissche Theorie
Verlag Harri Deutsch, Zürich-Frankfurt, 1968

Artin, M. [1966]
On isolated rational singularities of surfaces
Amer. J. Math. 88 (1966), 129-136

Artin, M., Verdier, J.L. [1985]
Reflexive modules over rational double points
Math. Ann. 270, 79-82 (1985)

Auslander, M. [1986]
Rational singularities and almost split sequences
Transact. AMS 293(1986), 511-531

Ayoub, R.G. [1980]
Paolo Ruffini's Contribution to the Quintic
Arch. Hist. Ex. Sci. 23, 253-277 (1980)

Ayoub, R.G. [1982]
On the non-solvability of the general polynomial
Amer. Math. Monthly 89, 397-401 (1982)

B

Barth, W., Hulek, K. [1985]
Projective models of Shioda modular surfaces
manuscripta math. 50 (1985), 73-131

Barth, W., Hulek, K., Moore,R. [1984]
Shioda's modular suface S(5) and the Horrocks-Mumford bundle
in: Vector bundles on algebraic varieties, Bombay Colloquium 1984, 35-106, Oxford University Press, 1987

Barth, W., Hulek, K., Moore,R. [1987]
Degenerations of Horrocks-Mumford surfaces
Math. Ann.277 (1987), 735-755

Bartsch, R. G. [1985]
Meromorphe Funktionen auf der universellen elliptischen Kurve mit Niveau-N-Struktur
Dissertation, Math. Seminar Hamburg, 1985

Bennequin, D. [1984]
Caustique mystique
Séminaire Bourbaki,année 1984-85, no 634

Berry, T.,Herrero, D., Kuplinsky, J., Slutzki, R. [1981]
Las Ecuaciones de Quinto Grado , Partes I y II
Seminar Notes, Departamento de Matematicas, Universidad Simon Bolivar, Caracas, Venezuela, no. 68 (1981), no. 75 (1982)

Betti, E. [1853]
Sopra l'abassamento della equazioni modulari delle funzioni ellitiche
Annali di Scienze Matematiche e Fisiche 3 (1853)

Bézout,E. [1762]
Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique
Hist. Acad. Sci. Paris (1762)

Bézout,E. [1765]
Sur la resolution des équations de tous les degrés
Hist. Acad. Sci. Paris (1765)

Biermann, K.-R. [1988]
Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität
Akademie-Verlag, Berlin, 1988

Bourbaki, N. [1968]
Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV-VI
Hermann, Paris, 1968

Bourbaki, N. [1969]
Élements d'histoire de mathematiques
Hermann, Paris, 1969

Brauer, R. [CP]
Collected Papers I,II,III
Mit Press, Cambridge Mass., 1980

Brauer, R. [1934]
Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen
Math. Ann. 110, 473-500 (1934)
in CP III, 570-597

Brauer, R. [1975]
On the Resolvent Problem
Annali di Matematica pura ed applicata 102(1975), 45-55
in CP III, 536-546

Brauer, R. [1979]
Symmetrische Funktionen. Invarianten von linearen Gruppen endlicher Ordnung
Math. J. Okayama Univ. 21, 91-113 (1979)
in CP III, 622-644

Bravais, A. [1849]
Mémoires sur les polyèdres de forme symétrique
Journ. de Math. XIV(1849), 141-180

Brieskorn, E. [1968]
Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen
Math. Annalen 178 (1968), 255-270

Brieskorn, E. [1970]
Singular elements of semisimple algebraic groups
Actes Congr. Int. Math. Nice 1970, t.2, 279-284

Brieskorn, E. [1976]
Singularitäten
Jber. Deutsch. Math.-Verein 78, 93-112 (1976)

Brieskorn, E., Knörrer, H. [1981]
Ebene algebraische Kurven
Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1981

Bring,E.S. [1786]
Melemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum
Promotionsschrift Lund, 1786
reproduziert in
Quarterly Journ. Math. 6 (1864), 45-47
Archiv Math. Phys. 41 (1864), 105-112
Annali di Mat. 6 (1864), 33-42

Brioschi, F. [1858a]
Sur diverses équations analogues aux équations modulaires
C.R.A.S. Paris, (August 1858)

Brioschi, F. [1858b]
Sulle equazione del moltiplicatore per la transformazione delle funzioni elittichi
Annali di Matematica 1 (1858)

Brioschi, F. [1878]
Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade
Math. Annalen 13,109-160 (1878)

Buchweitz, R.-O., Greuel, G.-M., Schreyer, F.-O. [1987]
Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities II
Invent. math. 88 (1987), 165-182

Burckhardt, H. [1890-93]
Untersuchungen aus dem Gebiet der hyperelliptischen Modulfunktionen, I,II,III
Math. Annalen 36(1890), 371-434
Math. Annalen 38(1891), 161-224
Math. Annalen 41(1893), 313-343

Burckhardt, H. [1893]
Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen
Math. Ann. 41, 309-312 (1893)

Burns, D. [1983]
On the geometry of elliptic modular sufaces and representations of finite groups
in " Algebraic Geometry ", Proc., Ann Arbor 1981, Ed. I. Dolgachev,
Springer Lecture Notes in Math. 1008, 1-29 (1983)

Burnside, W. [1911]
Theory of groups of finite order
Cambridge University Press, 1911 (Dover reprint, New York, 1955)

C

Capelli, A., Itzykson, C., Zuber, J-B. [1987]
The A-D-E-classification of minmal and $\tilde{A}(1)$ conformal invariant theories
Communications in Math. Phys.113, 1-16 (1987)

Caratheodory, C. [1960]
Funktionentheorie II
2. Auflage, Birkhäuser, Basel, 1960

Cayley, A. [1861]
On a new auxiliary equation in theory of equations of the 5-th degree
Phil. Trans. 152 (1861)

Clebsch, A. [1871]
Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits
Math. Annalen 4, 284-345 (1871)

Clebsch, A. [1872]
Theorie der binären algebraischen Formen
Teubner, Leipzig, 1872

Coble, A.B. [1908]
An application of the form-problems associated with certain Cremona groups to the solution of equations of higher degree
Transactions of the AMS 9(1908), 396-424

Coble, A.B. [1911a]
An application of Moore's cross-ratio group to the solution of the sextic equation
Transactions of the AMS 12(1911), 311-325

Coble, A.B. [1911b]
The Reduction of the Sextic Equation to the Valentiner Form-Problem
Math. Annalen 70(1911), 337-350

Coble, A.B. [1913]
An application of finite geometry to the characteristic theory of the odd and even theta functions
Transactions of the AMS 14(1913), 241-276

Coble, A.B. [1915]
Point sets and allied Cremona groups I
Transactions of the AMS 16(1915), 155-198

Coble, A.B. [1916]
Point sets and allied Cremona groups II
Transactions of the AMS 17(1916), 345-385

Coble, A.B. [1917]
Point sets and allied Cremona groups III
Transactions of the AMS 18(1917), 331-372

Coble, A.B. [1924]
The equation of the eighth degree
Bull. AMS 30(1924), 301-313

Cohn, H. [1981]
Iterated ring class fields and the icosahedron
Math. Annalen 255(1981), 107-122

Cohn, H. [1985]
Introduction to the construction of class fields
Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985

Cohn, H. [1985]
Klein's paradox, the icosahedron, and ring class fields
Number theory, Sem. New York 1983-84, Springer Lecture Notes in Math. 1135(1985), 101-111

Cole, F.N. [1887]
Klein's Ikosaeder
Amer. J. Math.IX, 45-61 (1887)

Coxeter, H.S.M. [1940]
The binary polyhedral groups and other generalizations of the quaternion group
Duke Math. J. 7, 367-379 (1940)

Coxeter, H.S.M. [1973]
Regular Polytopes
3rd ed., Dover, New York, 1973

Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. [1975]
Generators and Relations for Discrete Groups
3rd ed., Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975

D

Decker, W., Schreyer, F.O. [1986]
On the uniqueness of of the Horrocks-Mumford bundle
Math. Ann.273 (1986),415-443

Dedekind, Richard
Gesammelte Mathematische Werke
Ed. R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore, 3 Bde.,
Vieweg, Braunschweig, 1930,31,32

Dedekind, Richard [1877]
Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen
J. Reine u. Angew. Math. 83,265-292 (1877)
in Ges. Math. Werke Bd. I,174-201

Deuring, M. [1933]
Galoissche Theorie und Darstellungstheorie
Math. Ann. 107, 140-144 (1933)

Dickson, L.E. [1908]
Representations of the general symmetric groups as linear groups in finite and infinite fields
Transactions of the AMS, 9, 121-148 (1908)

Dickson, L.E. [1911]
A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem
Formproblem für GL(n,F(q))
Transactions of the AMS, 12, 75-98 (1911)

Dickson,L.E. [1930]
Modern Algebraic Theories
Sanborn, New York, 1930

Durfee, A.H. [1979]
Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points
L`Enseignement mathématique, T.XXV 1-2, 131-163 (1979)

Dutka, J. [1984]
The early history of the hypergeometric function
Arch. Hist. Ex. Sci. 31, 15-34 (1984)

DuVal, P. [1934]
On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction
Proc. Cambridge Phil. Soc. 30, 453-459 (1934)

DuVal, P. [1964]
Homographies, Quaternions, and Rotations
Clarendon Press, Oxford, 1964

E

Edge, W.L. [1978]
Bring`s Curve
J. London Math. Soc.(2) 18, 539-545 (1978)

Edwards, H.M. [1984]
Galois Theory
Springer Graduate Text in Math. 101, 1984

Esnault, H. ; Knörrer, H. [1985]
Reflexive modules over rational double points
Math. Ann. 272, 545-548 (1985)

Esnault, H. [1985]
Reflexive modules on quotient singularities
J. Reine Angew. Math. 362, 63-71 (1985)

Euler, L. [1732]
Conjectio de formis radicum aequationum cujusvis ordinis
Com. Petropol. 6 (1732)

Euler, L. [1762]
De resolutione aequationum cujusvis gradus
Nov. Com. Petropol. 9 (1762)

F

Feit, W. [1976]
Exceptional Subgroups of GL(2)
Appendix to Ch. XI, pp. 198-203 in
S. Lang: Intoduction to modular forms, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976

Fischer, G. (Hrsg.) [1986]
Mathematische Modelle
Vieweg, Braunschweig, 1986

Fischer, W., Lieb, I. [1988]
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie
Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1988

Ford, D., McKay, J. [1981]
Representations and Coxeter graphs
in " The Geometric Vein " (The Coxeter-Festschrift)
Ed. Ch. Davis, B. Grünbaum, F.A. Sherk
Springer Verlag, 1981, pp. 549-554

Frei, G. [1984]
Felix Klein (1849-1925) - A biographical sketch
Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984, 229-254,
Bibliograph. Institut, Mannheim, 1984

Fricke, R. [1916/22]
Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, I , II
Teubner, Leipzig, 1916,1922

Fricke, R. [1924/26/28]
Lehrbuch der Algebra , Bd I,II,III
Vieweg Verlag, Braunschweig 1924, 1926,1928

Fricke, R., Klein, F. [1897]
Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I
Teubner, Leipzig, 1897

Fricke, R., Klein, F. [1912]
Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen II
Teubner, Leipzig, 1912

Fuchs, L. [1876]
Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie
Journ. Reine u. Angew. Math. 81, 97-142 (1876)

G

Galois, E. [1962]
Écrits et Mémoires Mathématiques d'Evariste Galois,
(Ed. R. Bourgne, J.-P. Azra), Gauthier-Villars, Paris, 1962

Garver, R. [1928]
The Tschirnhaus transformation
Ann. of Math 29(1928), 319-333

Ginsparg, P. [1987]
Curiosities at c=1
Preprint HUTP-87/ A068, Harvard University, Cambridge, Mass., 1987

Gonzalez-Sprinberg, G., Verdier, J.L. [1981]
Points doubles rationnels et representations de groupes
C.R.Acad.Sc. Paris, t. 293 (1981), Ser. I, 111-113

Gonzalez-Sprinberg, G., Verdier, J.L. [1983]
Construction géometrique de la correspondance de McKay
Ann. Sci E.N.S. 16, 409-449 (1983)

Gordan P. [1877]
Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen
Math. Annalen 12(1877), 23-46

Gordan P. [1878]
Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades
Math. Annalen 13(1878), 375-404

Gordan P. [1880a]
Über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form
$f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$
Math. Annalen 17(1880), 217-233

Gordan P. [1880b]
Über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form
$f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$
Math. Annalen 17(1880), 359-378

Gordan P. [1882a]
Über Büschel von Kegelschnitten
Math. Annalen 19(1881/82), 529-552

Gordan P. [1882b]
Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form
$f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$
Math. Annalen 20(1882), 487-514

Gordan P. [1882c]
Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen
Math. Annalen 20(1882), 515-530

Gordan P. [1885a]
Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen II
Math. Annalen 25(1885), 459-521

Gordan P. [1885b]
Sur les équations du cinquième degré
Journal de Math. 1(1885), 445-458

Gordan P. [1887]
Über Gleichungen fünften Grades
Math. Annalen 28(1887), 152-166

Gordan P. [1904]
Über die Auflösung derGleichungen sechsten Grades
Verh. des III. Internat. Mathematikerkongresses, Heidelberg 1904, (1905), 140-143

Gordan P. [1905]
Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems
Math. Annalen 61(1905), 453-526

Gordan P. [1908]
Gleichungen sechsten Grades
Atti del IV. Congr, Intern. dei Matem., Roma 1908, Vol II (1909), 5-7

Gordan P. [1910]
Über eine Kleinsche Bilinearform
Math. Annalen 68(1910), 1-23

Gray, J. [1982]
From the history of a simple group
The Mathematical Intelligencer 4, No 2, 1982, 59-67

Gray, J. [1984]
Fuchs and the theory of differential equations
Bulletin of the AMS 10, 1-26 (1984)

Gray, J. [1986]
Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré
Birkhäuser, Basel, 1986

Green, M.L. [1978]
On the analytic solution of the equation of fifth degree
Compositio Math. 37, 233-241 (1978)

Greuel, G.M., Trautmann, G. (Eds.) [1987]
Singularities, Representations of Algebras, and Vector Bundles
Springer Lect. Notes in Math. 1273, 1987

Griffith, Ph., Harris, J. [1978]
Principles of Algebraic Geometry
J. Wiley, New York, 1978

Grothendieck, A., Dieudonné, J. [EGA]
Eléments de Géometrie Algébrique
Chap. I,II,III, IV,
Publications Math. IHES 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1961-1967

H

Haenzel, G. [1941]
Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder
Journ. Reine u. Angew. Math. 183, 232-242 (1941)

Hamilton, W.R. [1856]
Memorandum respecting a new system of roots of unity
Phil. Mag. XII,446 (1856)

Happel, D., Preiser ,U., Ringel, C.M. [1980]
Binary polyhedral groups and Euclidean diagrams
manuscripta math. 31, 317-329 (1980)

Hartshorne, R. [1977]
Algebraic Geometry
Springer Graduate Text 52, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977

Hawkins, Th. [1970]
The origins of the theory of group characters
Arch. Hist. Ex. Sci. 7(1970), 142-170

Hawkins, Th. [1972]
Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory
Arch. Hist. Ex. Sci. 8 (1972), 243-287

Hawkins, Th. [1974]
New light on Frobenius' creation of the theory of group characters
Arch. Hist. Ex. Sci. 12(1974), 217-243

Hazewinkel, M., Hesselink, W., Siersma, D., Veldkamp, F.D. [1977]
The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the A-D-E problem)
Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XXV(1977), 257-307

Hermite, Ch.
Oeuvres de Ch. Hermite
4 Bde., Gauthiers-Villars, Paris, 1905-1917

Hermite, Ch. [1850]
Extraits de lettres de M. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres
Crelles Journal 40(1850),261-315
Oeuvres I, 100-163

Hermite, Ch. [1858a]
Sur la résolution de l'équation du cinquième degré
C.R.A.S. Paris 46 (1858), Oeuvres t. II, 5-12

Hermite, Ch. [1858b]
Sur la résolution de l'équation du quatrième degré
C.R.A.S. Paris 46 (1858), Oeuvres t. II, 22-29

Hermite, Ch. [1858c]
Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'equation du quatrième degré
C.R.A.S. Paris 46 (1858), Oeuvres t. II, 30-77

Hermite, Ch. [1859]
Sur la théorie des équations modulaires
C.R.A.S. Paris 48, 49 (1859), Oeuvres t. II, 38-82

Hermite, Ch. [1865/66]
Sur l'équation du cinquième degré
C.R.A.S. Paris (1865/66), Oeuvres t. II, 347-424

Herzog, J. [1978]
Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln
Math. Ann. 233, 21-34 (1978)

Hesse, O. [1866]
Ein Übertragungsprinzip
Crelles Journal f. d. r. u. a. Math. 66(1866), 15-21

Hilbert, D. [GA]
Gesammelte Abhandlungen, I, II, III
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1970 (2. Auflage)

Hilbert, D. [1890]
Über die Theorie der algebraischen Formen
Math. Ann. 36, 473-534 (1890), und
GA Bd.II, 199-257

Hilbert, D. [1897]
Die Theorie der algebraischen Zahlkörper
Jber. DMV 4 (1897), 175-546, und
GA Bd.I, 63-363

Hilbert, D. [1900]
Mathematische Probleme
GA Bd. III, 290-329

Hilbert, D. [1927]
Über die Gleichung neunten Grades
Math. Annalen 97(1927), 243-250, und
GA Bd.II, 393-400

Hirzebruch, F. [1976]
Hilbert's modular group of the field Q(√5) and the cubic diagonal surfaces of Clebsch and Klein
Russian Math. Surveys 31, 96-110 (1976)
Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Nr. 57, Vol II,394-408, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1987

Hirzebruch, F. [1977]
The ring of modular forms for real quadratic fields of small discriminant
in " Modular Functions of One Variable VI " Ed. J.-P. Serre, D.B. Zagier, Springer Lecture Notes in Math. 627, 288-323 (1977)
Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Nr. 62, Vol II,501-536, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1987

Hirzebruch, F. [1981]
The icosahedron
Raymond and Beverly Sackler Dist. Lecture in Math, Tel Aviv University, 50-81;
Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Nr. 67, Vol II,656-661, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1987

Horrocks, G., Mumford, D. [1973]
A rank 2 vector bundle on P(4) with 15000 symmetries
Topology 12 (1973), 63-81

Houzel,C. [1978]
Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes
Chap. VII in "Abrégé d'histoire de mathématiques", Ed. J. Dieudonné
t. II, 1-113, Hermann, Paris, 1978

Hulek, K. [1986]
Projective Geometry of Elliptic Curves
Astérisque 137, Soc. Math. France, 1986

Hulek, K. [1987]
Geometry of the Horrocks-Mumford Bundle
Proc. Symp. Pure Math. 46 (1987), 69-85

Hulek, K. [1989]
Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder
Jber. d. Dt. Math.-Verein 91 (1989) 126-147

Hulek, K., Lange, H. [1988]
The Hilbert modular surface for the ideal (√5) and the Horrocks-Mumford bundle
Math. Zeitschrift 198 (1988), 95-116

Hurwitz, A. [MW]
Mathematische Werke
Bd. 1,2,Birkhäuser Verlag, Basel, 1932/62, 1933/63

Hurwitz, A. [1881]
Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikator-Gleichungen erster Stufe
Math. Annalen 18(1881), 528-592
MW I, 1-66

Hurwitz, A. [1886]
Über endliche Gruppen, welche in der Theorie der elliptischen Transzendenten auftreten
Math. Annalen 27(1886), 183-233
MW I, 189-240

Hurwitz, A. [1888]
Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen
Math. Annalen 32(1888), 290-308
MW I, 241-259

Hurwitz, A. [1893]
Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich
Math. Annalen 41(1893), 403-442
MW I, 391-430

Hurwitz, A. [1897]
Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration
Nachr, königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys- Klasse, 1897, 71-90,
MW II, 546-564

I

Iwahori, N., Yokonuma, T. [1982]
On self-dual, completely reducible finite subgroups of Gl(2,k)
Journ. Fac. Sci.Univ. Tokyo, Sec IA 28, 829-842(1982)

J

Jänich, K. [1983]
Analysis für Physiker und Ingenieure
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983

Jacobi, C.G.J.
C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke
Verlag G. Reimer, Berlin, 1881
Chelsea Reprint, 1969

Jacobi, C.G.J. [1829a]
Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum
Königsberg, 1829
Gesammelte Werke, Bd. I, 49-239

Jacobi, C.G.J. [1829b]
Suite des Notices sur les fonctions elliptiques
Gesammelte Werke, Bd. I,266-275

Jerrard [1834]
Mathematical Researches
Longman, Bristol-London, 1834

Jordan, C. [1868]
Mémoires sur les groupes de mouvements
Ann. di Mat. II, 167-215 u. 322-345 (1868/69)
Oeuvres t. IV, 231-302, Gauthiers-Villars, Paris, 1964

Jordan, C. [1870]
Traité des substitutions et des équations algébriques
Gauthiers-Villars, Paris, 1870

K

Kantor, S. [1895]
Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene
Mayer und Müller, Berlin, 1895

Kiepert, L. [1879]
Auflösung der Gleichungen fünften Grades
Crelles Journal 87(1879), 114-133

Kiernan, B. M. [1972]
The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin
Arch. Hist. Ex. Sci. 8, 40-154 (1972)

Klein, F. [GMA]
Gesammelte Mathematische Abhandlungen I, II, III
Springer, Berlin, 1921/22/23

Klein, F. [1871]
Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen
Math. Annalen 4 (1871), 346-358
GMA II, 262-274

Klein, F. [1872]
Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen
(Erlanger Programm)
GMA I, 460-497

Klein, F. [1875]
Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich
Math. Annalen 9 (1875/76),183-208
GMA II, 275-301

Klein, F. [1876]
Über lineare Differentialgleichungen I
Math. Annalen 11 (1877), 115-118
GMA II, 302-306

Klein, F. [1877a]
Über lineare Differentialgleichungen II
Math. Annalen 12 (1877), 167-179
GMA II, 307-320

Klein, F. [1877b]
Sull'equazione dell'Icosaedro nella risoluzione delle equazione del quinto grado per funzioni ellitiche
Rendiconti Reale Istituto Lombardo, Ser. II Vol 10 (1877)
GMA III, 10-12

Klein, F. [1877c]
Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder
Math. Annalen 12 (1877), 503-560
GMA II, 321-384

Klein, F. [1878a]
Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades
Math. Annalen 14 (1878/79), 111-172
GMA II, 13-75

Klein, F. [1878b]
Über die Erniedrigung der Modulargleichungen
Math. Annalen 14 (1878/79), 417-427
GMA II, 76-89

Klein, F. [1878c]
Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen
Math. Annalen 14 (1878/79), 428-471
GMA III, 90-135

Klein, F. [1879a]
Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade
Math. Annalen 15 (1879), 251-282
GMA II, 390-438

Klein, F. [1879b]
Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Funktionen
Math. Annalen 15 (1879), 533-555
GMA III, 140-168

Klein, F. [1879c]
Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen
Math. Annalen 17 (1880/81), 62-70
GMA III, 169-178

Klein, F. [1884]
Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade
Teubner, Leipzig, 1884
Englische Übersetzung von G.G. Morrice: Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree,
Trübner and Co., London, 1888, 1913, Dover, New York, 1956

Klein, F. [1885]
Über die elliptischen Normalkurven N-ter Ordnung
Sächs. König. Ges. der Wiss. 13 (1885)
GMA III, 198-254

Klein, F. [1886]
Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades
Math. Annalen 28 (1886/87), 499-522
GMA II, 439-472

Klein, F. [1888]
Sur la résolution, par fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique
Journal de math. pure et appl., ser. 4, vol. 4 (1988)
GMA II, 473-479

Klein, F. [1894]
Lectures on Mathematics (The Evanston Colloquium)
Macmillan and Co., New York, 1894

Klein, F. [1905a]
Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades
Math. Annalen 61(1905), 50-71
GMA II, 481-504

Klein, F. [1905b]
Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen
Math. Annalen 61(1905/06), 369-371
GMA II, 385-387

Klein, F. [1926]
Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert
Springer Verlag, Berlin, 1926

Klein, F. [1933]
Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion
Hrsg. von O. Haupt, Springer Verlag, Berlin, 1933

Klein,F.; Fricke, R. [1890]
Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen I
Teubner, Leipzig, 1890
Reprint Teubner, Stuttgart, 1966

Klein,F.; Fricke, R. [1892]
Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen II
Teubner, Leipzig, 1892
Reprint Teubner, Stuttgart, 1966

Knörrer, H. [1985a]
Group representations and the resolution of rational double points
Contemporary Mathematics, Vol. 45, 175-222, American Math. Soc.
1985

Knörrer, H. [1985b]
Cohen-Macaulay modules over hypersurface singularities
pp. 147-164 in " Representations of Algebras"
LMS Lect. Notes 116, 1985

Knörrer, H. [1987]
Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I
Invent. math. 88 (1987), 153-164

Kostant, B. [1985]
On finite subgroups of SU(2), simple Lie algebras and the McKay correspondence
in " Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, pp.209-255,
Astérisque, Soc. Math. France 1985

Kronecker, L.
L. Kronecker's Werke
5 Bde., Berlin, 1895, 1897, 1899/1931, 1929, 1930
Chelsea Reprint, New York, 1968

Kronecker, L. [1858]
Sur la résolution de l'equation du cinquième degré
C.R. Acad. Sci. 46,1150-1152 (1958)
Werke Bd. 4, 45-47

Kronecker, L. [1861]
Mitteilung über algebraische Arbeiten
Akad. der Wissenschaften Berlin, 1861
in Werke, Band 4, 53-62

Kronecker, L. [1879]
Über die Classe der Gleichungen von denen die Theilung der elliptischen Funktionen abhängt
Monatsberichte der Berliner Akad. der Wiss., 1879
Werke Bd. 4, 88-96

Kronheimer P.B. [1986]
Instantons gravitationnels et singularités de Klein
C. R. Acad. Sci. Paris, 303 Sèrie I (1986), 53-55

Kronheimer P.B. [1988]
Instantons and the geometry of the nilpotent variety
Preprint, IAS Princeton, Oct. 1988

Kronheimer P.B. [1989a]
The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients
Journ. of Diff. Geometry 29(1989), 665-683

Kronheimer P.B. [1989b]
A Torelli type theorem for gravitational instantons
Journ. of Diff. Geometry 29(1989), 685-697

Krull, W. [1959]
Elementare und klassische Algebra II
Sammlung Göschen , Band 933, W. de Gruyter, Berlin, 1959

Kuplinsky, J. [1981]
La Ecuacion de Quinto Grado en Cuerpos Locales
Tesis a la Universidad Simon Bolivar, Caracas, Venezuela, 1981

L

Lachtin, L. [1899]
Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6. Grades mit einer Gruppe 360. Ordnung
Math. Annalen 51(1899), 463-472

Lagrange, J.L. [1771]
Sur la résolution algébrique des équations
Mem. Akad. Wiss. Berlin (1770/71)

Lamotke, K. [1986]
Regular Solids and Isolated Singularities
Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1986

Lang, S. [1967]
Algebra
Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967

Lang, S. [1973]
Elliptic Functions
Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973

Lang, S. [1976]
Intoduction to modular forms
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976

Lindemann, F. [1892]
Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transzendente Funktionen I, II
Göttinger Nachrichten (1884), 245-248, (1892), 292-298

Luther,E. [1847]
De criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit
Crelle Bd. 34 (1847)

Lüroth, J. [1875]
Beweis eines Satzes über rationale Curven
Math. Annalen 9(1875), 163-165

M

Malfatti, G. [1771]
De aequationibus quadrato-cubicis, disquisitio analytica
Atti dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena (1771)

Maschke, H. [1887]
Über die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln
Math. Annalen 30(1887),496-515

Maschke, H. [1889]
Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen
Math. Annalen 33(1889), 317-344

McKay, J. [1980]
Graphs, singularities, and finite groups
Proc. Symp. Pure Math. Vol. 37, 183-186 (1980)

Milne, J. [1980]
Etale Cohomology
Princeton University Press, Princeton N.J., 1980

Moebius, A. [1852]
Theorie der symmetrischen Figuren
Ges. Werke Bd. 2, 561-708
Hirzel, Leipzig, 1886

Moore, E.H. [1899]
Concerning the general equations of the seventh and eighth degrees
Math. Annalen 51(1899), 416-444

Murre, J.P. [1967]
An Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group
Tata Institute Lecture Notes Vol. 40,Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967

N

Nahm, W. [1988]
Lie group exponents and SU(2)-current algebras
Communications in Math. Phys.118, 171-176 (1988)

Naruki, I. [1978]
Über die Klein'sche Ikosaederkurve sechsten Grades
Math. Annalen 231, 205-216 (1978)

Noether E. [1932a]
Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung
Journal Reine Angew. Math. 167(1932), 147-152
Ges. Abhandlungen, 624-629, Springer Verlag, 1983

Noether E. [1932b]
Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie
Verhandl. Intern. Math.-Kongress Zürich 1(1932), 189-194
Ges. Abhandlungen, 636-641, Springer Verlag, 1983

Noether, M. [1889]
Über eine Klasse von auf die Ebene abbildbaren Doppelebenen
Math. Ann. 33, 525-545 (1889)

Noether, M. [1913]
Paul Gordan
Math. Ann. 75, 1-41 (1913)

O

P

Perron, O. [1951]
Algebra II
3. Auflage, W. de Gruyter u. Co., Berlin, 1951

Pierpont, J. [1895]
Zur Geschichte der Gleichungen des fünften Grades (bis 1858)
Monatshefte für Math. und Physik , 15-68, Wien, 1895

Q

R

Reiten, I. [1987]
Finite dimensional algebras and singularities
in "Singularities, Representations of Algebras, and Vector Bundles", G.-M. Greuel, G. Trautmann Ed.,
Springer Lect. Notes in Math. 1273(1987), 35-57

Riemann, B.
Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, Nachträge
Hrsg. R. Dedekind, H. Weber, M. Noether, W. Wirtinger
Teubner, Leipzig, 1902

Riemenschneider, O. [1977]
Die Invarianten der endlichen Untergruppen von GL(2,C)
Math. Zeitschrift 153, 37-50(1977)

Riemenschneider, O. [1986]
Platonische Zahlentripel als Indikatoren verborgener Beziehungen zwischen einfachen mathematischen Objekten
Bericht der Joachim-Jungius-Gesellschaft der Wissenschaften e.V.,Heft 9, Hamburg, 1986

Ruffini, P. [1813]
Riflessione intorno alla soluzione delle equazione algebraiche generali
Modena, 1813

Runge, C. [1885]
Über die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5+ux+v=0$
Acta mathematica 7(1885), 173-186

S

Schläfli, L. [1901]
Theorie der vielfachen Kontinuität
Denkschrift der Schweiz. naturf. Gesellschaft 38(1901), 1-237
Ges. Math Abh. Bd. I, 167-387, Birkhäuser Verlag, Basel, 1950

Schoeneberg, B. [1974]
Elliptic Modular Functions
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974

Scholz, E. [1980]
Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré
Birkhäuser Verlag, Basel, 1980

Schreyer, F.O. [1987]
Finite and countable CM-representation type
in "Singularities, Representations of Algebras, and Vector Bundles", G.-M. Greuel, G. Trautmann Ed.,
Springer Lect. Notes in Math. 1273(1987), 9-34

Schur, I. [GA]
Gesammelte Abhandlungen, 3 Bände
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973

Schur, I. [1904]
Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochen lineare Substitutionen
Journal Reine u. Angewandte Math. 127(1904), 20-50
GA I, 86-116

Schur, I. [1907]
Untersuchung über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochen lineare Substitutionen
Journal Reine u. Angewandte Math. 132(1907), 85-137
GA I, 198-250

Schur, I. [1911]
Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochen lineare Substitutionen
Journal Reine u. Angewandte Math. 139(1911), 155-250
GA I, 346-441

Schur, I. [1919]
Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn A. Speiser
Math. Zeitschrift 5, 7-10 (1919)

Schwarz, H.A. [1873]
Über diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt
J. Reine u. Angew. Math. 75, 292-335 (1873)
Ges. Math. Abh. II, 211-259, Springer, Berlin, 1890

Sekiguchi, J., Yano, T. [1979]
A note on the Coxeter group of type H_3
Science Reports of the Saitama University, Ser. A, Vol IX(1), 33-44 (1979)

Serre, J-P. [1965]
Cohomologie galoisienne
Springer Lect. Notes in Math. 5, 1965

Serre, J-P. [1968]
Corps locaux
Hermann, Paris, 1968

Serre, J-P. [1970]
Cours d'arithmétique
Presses Universitaires Francaises, Paris, 1970

Serre, J-P. [1978]
Extensions icosaédriques
Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, Année 1979-1980, exposé no 19, in " Oeuvres-Collected Papers ", Vol III, 550-554,
Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985

Serre, J-P. [1985]
L'invariant de Witt de la forme $Tr(x^2)$
Commentarii Math. Helvetici 59, 651-676 (1984)
Oeuvres Vol. III, 675-700

Serret, J.A. [1866]
Cours d'Algèbre Supérieure
3ème ed., Gauthiers-Villars, Paris, 1866
4ème ed., Gauthiers-Villars, Paris, 1879

Sherbak, O.P. [1983]
Singularities of families of evolvents in the neighborhood of an inflection point of a curve, and the group H(3) generated by reflections
Funct. Anal. 17(1983),301-302

Sherbak, O.P. [1988]
Wavefronts and reflection groups
Russian Math. Surveys 43 (3)(1988), 149-194

Silvestri, R. [1979]
Simple groups of finite order in the nineteenth century
Arch. Hist. Ex. Sci. 20, 313-356 (1979)

Slodowy, P. [1983]
Platonic solids, Kleinian singularities, and Lie groups
in " Algebraic Geometry ", Proc., Ann Arbor 1981, Ed. I. Dolgachev,
Springer Lecture Notes in Math. 1008, 102-138(1983)

Slodowy, P. [1986]
Das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades
S. 71-113 in " Arithmetik und Geometrie ", H. Knörrer et alii, Mathematische Miniaturen Bd. 3, Birkhäuser, Basel, 1986

Speiser, A. [1916]
Gruppendeterminante und Körperdiskriminante
Math. Ann 77, 546-562 (1916)

Speiser, A. [1917]
L'équation du cinquième degré
L'Enseignement mathematique 19 (1917), 331-332

Speiser, A. [1919]
Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie
Math. Zeitschrift 5, 1-6 (1919)

Speiser, A. [1956]
Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung
4. Aufl., Birkhäuser, Basel, 1956

Springer, T.A. [1977]
Invariant theory
Lecture Notes in Math. 585, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977

Springer, T.A. [1987]
Poincaré Series of Binary Polyhedral Groups and McKay's Correspondence
Math. Annalen 278, 99-116 (1987)

Springer, T.A. [1989]
Some remarks on characters of binary polyhedral groups
Preprint 1989

Steinberg, R. [1985]
Finite subgroups of SU(2), Dynkin diagrams and affine Coxeter elements
Pac. J. Math. 118, 587-598 (1985)

Szurek, M. [1986]
Binary quintics and the icosahedron
in: Algebraic Geometry, Vancouver 1984, CMS-Conf. Proc., Vol. 6, 1986, 473-475

T

Tits, J.L. [1980]
Quaternions over Q(√5), Leech`s lattice and the sporadic group of Hall-Janko
Journal of Algebra 63, 56-75 (1980)

Tobies, R. [1981]
Felix Klein
Teubner, Reihe Biographien, Leipzig, 1981

Tropfke, J. [1980]
Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 1
W. de Gruyter, Berlin 1980

Tschirnhaus,E.W. [1683]
Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione
Acta Eruditorum, 204-207 (1683)

U

Umemura, H. [1984]
Resolutions of Algebraic Equations by Theta Constants
Ch. IIIc in D. Mumford " Tata lectures on Theta "
Progress in Math. 43, Birkhäuser, Basel-Boston, 1984

V

Vandermonde,Th. [1771]
Mémoire sur la résolution des équations
Histoire Acad. Sci. Paris, 365-416 (1771)

Vigneras, M.F. [1980]
Arithmétique des Algèbres de Quaternions
Springer Lect. Notes in Math. 800, 1980

Vivanti, G. [1906]
Funzioni Poliedrichi e Modulari
U. Hoepfli, Milano, 1906
franz. Übers. " Les fonctions polyèdriques et modulaires", Gauthiers-Villars, Paris, 1910

W

Waerden, van der, B.L. [1966]
Algebra I
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966

Waerden, van der, B.L. [1967]
Algebra II
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967

Weber, H. [1912]
Lehrbuch der Algebra I (2. Aufl.)
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1912

Weber, H. [1899]
Lehrbuch der Algebra II (2. Aufl.)
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1899

Weyl, H. [1930]
Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart
Die Naturwissenschaften 18, 4-11 (1930)
Ges. Abh. Bd. III, 292-299

Weyl, H. [1955]
Symmetrie
Birkhäuser, Basel, 1955

Wiman, A. [1896]
Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen
Math. Annalen 47(1896), 531-556

Wiman, A. [1897]
Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene
Math. Annalen 48(1897), 195-240

Wiman, A. [1899]
Über die Darstellung der symmetrischen und alternierenden Vertauschungsgruppen als Kollineationsgruppen von möglichst geringer Dimensionsanzahl
Math. Annalen 52(1899), 243-270

Wiman, A. [1900]
Endliche Gruppen linearer Transformationen
Enzykl. Math. Wiss. IB 3f,522-554,
Ed. W.F. Meyer, Teubner, Leipzig, 1900

Wunram, J. [1988]
Reflexive modules on quotient surface singulariteies
Math. Ann. 279, 583-598(1988)

Wussing, H. [1969]
Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs
VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969

XYZ

Serre, J-P. [1959]
Groupes algébriques et corps de classes
Hermannn, Paris, 1959